

D. FRANCISCI MAVROLYCI, ABBATIS MESSANENSIS, Mathematici celeberrimi,

ARITHMETICORVM LIBRI DVO,

NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITI,
Cum rerum omnium notabilium

INDICE COPIOSISSIMO.

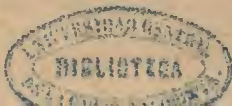
PER ME QVI SI RIPOSA, E'N CIEL SI GODE.



CVM PRIVILEGIO.

Venetijs, Apud Franciscum Franciscium Senensem.

M D LX X V.



Numeri lineares.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Radices	
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares	
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	Pares	496. Et deinceps.
1		6				28				Perfecti	

Superficiales primi.

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	Trianguli primi.
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrati primi.
0	2	6	12	20	30	42	56	72	90	parte altera longiores.
1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	Pentagoni primi.
1	6	15	28	45	66	91	120	15	190	Hexagoni primi.

Pyramides Primæ.

1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	Pyramides triangula prima.
1	5	14	30	55	91	140	204	185	385	Pyramides quadrata prima
1	6	18	40	75	126	196	288	405	550	Pyramides pentagona prima.
1	7	22	50	95	161	252	372	525	715	Pyramides hexagona prima:

Columnæ primæ.

1	6	18	40	75	126	196	288	405	550	Columna triangula prima	
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	Columna quadrata prima.	Vel Cubi.
1	10	36	88	175	306	490	736	1053	1450	Columna pentagona prima	
1	12	45	112	225	396	637	950	1377	1900	Columna hexagona prima.	

Superficiales Secundi centrales.

1	4	10	31	19	46	64	85	109	136	Trianguli secundi.	
1	5	13	41	25	61	85	113	145	181	Quadrati secundi.	
1	6	16	51	31	76	106	141	181	226	Pentagoni secundi.	
1	7	19	61	37	91	127	169	217	271	hexagoni secundi.	æquianguli.
1	8	22	71	43	106	148	197	253	316	heptagoni secundi.	
1	9	25	81	49	121	169	225	289	361	Octogoni secundi.	

Pyramides secundæ centr.

1	5	15	34	65	111	175	260	369	505	pyramides triangula secunda
1	6	19	44	85	145	231	344	489	670	pyramides quadrata secunda
1	7	23	54	105	181	287	428	609	835	pyramides pentagona secunda
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	pyramides hexagona secunda
1	9	31	74	145	251	399	596	849	1165	pyramides heptagona secunda
1	10	35	84	165	286	455	680	969	1330	pyramides octogona secunda

Columnæ secundæ centr.

1	8	30	76	155	276	448	680	981	1360	Columna triangula secunda
1	10	39	100	205	366	595	904	1305	1810	Columna quadrata secunda
1	12	48	124	255	456	742	1128	1629	2260	Columna pentagona secunda
1	14	57	148	305	546	889	1352	1953	2710	Columna hexagona secunda
1	16	66	172	355	636	1036	1576	2277	3160	Columna heptagona secunda
1	18	75	396	405	726	1183	1800	2601	3610	Columna octogona secunda

Solida Regularia in numeris.

1	9	35	91	189	341	559	855	1241	1729	Tetrahedra.	Vel pyramides
1	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439	Octahedri.	Et iidem Cubi.
1	33	155	427	909	1661	2743	4215	6137	8569	Icosahedri.	Et iidem Dodecahedri.

Quadrati Quadratorum.

1	16	81	256	625	1296	2481	4096	6561	10000	Biquadrati.

FORMATIO NVMERORVM

Præcedentis Tabellę.



ADICES formantur ab unitate,& per unitatis continuam additionem.

Impares ab unitate, per binarij continuam additionem. Vel ex duabus radicibus.

Pares a binario, & per binarij ſemper additionem; uel duplicando radices.

Trianguli primi, per continuatam radicum accumulationem. Siue multiplicando aggregatum collateralis radicis & unitatis in dimidium multitudinis radicum.

Quadrati primi ex ductu radicum in ſe, uel ex aggregatione ſucceſſiua imparium ab unitate. Vel ex coniunctione trianguli collateralis cũ præcedenti, uel multiplicando aggregatũ collateralis imparis & unitatis in dimidium radicis.

Parte altera longiores ex ductu collateralis radicis in radicem immediatè præcedentem: ſiue ex aggregatione continuata parium: ſiue ex duplato triangulo pręcedenti: ſiue ex præcedenti quadrato cum ſua radice.

Pentagoni primi ex coniunctione collateralis quadrati cum triangulo præcedenti.

Hexagoni primi ex quadrato collaterali,duploq; præcedẽtis trianguli: Vel ex pentagono coll. dictoq; triangulo: Vel ex ductu radicum in impares: Vel ex quadrato cum parte altera lungiori.

Pyramides triangulę primę ex ſucceſſiua triangulorum aggregatione.

Similiter pyramides quadratę ex quadratorum. Pyramides pentagonæ ex pentagonorum; pyramides hexagonę ex hexagonorum aceruo conſtruuntur.

Item pyramides quadratæ primæ fiunt ex coniunctione collateralis pyramidis triangulæ cum præcedenti.

Pyramides pentagonæ primæ ex collaterali quadrata pyramide cum præcedenti triangula pyramide.

Pyramides hexagonæ primæ ex quadrata pyramide collaterali cum duplo præcedentis triangulæ pyramidis. Vel ex pentagona pyramide collaterali,& triangula pyramide præcedenti.

Columæ nprimæ fiunt ex ductu ſuarum ſuperficierum in radices: ut puta triangulæ ex radice in triangulos: & ſic de cæteris.

Item columnæ triangulæ primæ ſunt æquales pyramidibus pentagonis

nis primis, singulæ singulis. Quod notatu dignum est:

Columnæ quadratæ primæ, siue cubi, fiunt ex ductu radicum in suos quadrâtos.

Siue ex columna triangula collaterali & præcedenti cũ suo triangulo.

Vel ex pyramide hexagona prima cum pyramide quadrata præcedẽti.

Vel ex aggregatione unius, deinde binorum, deinde trium, deinde qdatuor, & sic deinceps imparium.

Item columnæ pentagonæ primæ fient ex cubo collaterali cum columna triangula & triangulo præcedentibus.

Columnæ hexagonæ primæ item ex columna pentagona collaterali cũ pręcedenti triangula columna & suo triangulo.

Trianguli secundi fiunt ex triangulo primo præcedenti triplicato cum unitate.

Pro quadratis autem secundis, quadruplicetur dictus triangulus.

Pro pentagonis quintuplicetur. & sic deinceps pro sequentibus formis, adiecta unitate.

Item trianguli secundi fient ex triangulo primo collaterali & quadrato præcedenti.

Quadrati secundi ex quadrato collaterali & pręcedenti primis.

Pentagoni secundi ex pentagono collaterali & quadrato præcedenti primis.

Hexagoni secundi æquianguli ex collaterali hexagono primo cum quadrato pręcedenti. Vel ex quadrato collaterali & præcedenti & parte altera longiore collaterali. Vel ex parte altera longiore triplicato cum unitate.

Heptagoni ex hexagono secundo collaterali cum triangulo primo præcedenti.

Octogoni ex heptagono dicto collaterali cum triangulo præcedenti primi ord. Siue (quod notatu dignum est) ex collaterali impari in se multiplicato.

Pyramides secundę fiunt ex accumulatione continuata suarum superficierum, scilicet triangulæ triangulorum, quadratę quadratorum secundi ordini & sic deinceps.

Item pyramides secundæ triangulę fient ex pyramide triangula prima, & præcedenti pyramide quadrata.

Pyramides autem quadratæ secundę ex pyramide quadrata collaterali cum præcedenti primi ordinis.

Pyramides pentagonæ secundæ, ex pyramidæ pentagona prima, & pyramide quadrata pręcedenti prima.

Pyramides hexagonæ secundę ex pyramide hexagona prima & pyramide

mide quadrata pręcedenti prima. Et ſunt æquales cubis collateralibus, ſingulę ſingulis. quod mirum eſt.

Pyramides heptagonæ ſecundę, ex hexagona pyramide ſecunda collaterali cum pręcedenti triangula pyramide prima.

Pyramides octogonę ſecundę ex heptagona pyramide collaterali cum pręcedenti pyramide triangula prima.

Item unaqueq; dictarum pyramidum fit ex pyramide triangula primi ordinis multiplicata in numerum laterum, unà cum radice collaterali.

Columnę ſecundę fient ex multiplicatione ſuarum ſuperficierum in radices collaterales, triangulæ ſcilicet triangulorum, quadratæ quadratorum. Et deinceps ſimiliter.

Item omnis columna ſecundi ordinis, fiet ex columna eiuſdem nominis in primo ordine cum pręcedenti cubo: & quadrato coniuncta.

OMNIS COLVMNA TRIANGVLA Prima cum duplo ſui trianguli, facit triplum ſuę pyramidis.

Omnis cubus cum ſuo quadrato & triangulo, facit triplum ſuę pyramidis.

Omnis columna pentagona prima cum duplo quadrati collateralis, facit triplum ſuę pyramidis.

Omnis columna hexagona prima cum ſuo hexagono coll.&triangulo, facit triplum ſuæ pyramidis.

Omnis columna triangula ſecunda cum coll.quadrato & triangulo primis, facit triplum ſuę pyramidis.

Omnis columna quadrata ſecunda cum duplo coll. quadrati primi, facit triplum ſuæ pyramidis.

Omnis columna quadrata ſecunda cum duplo coll.quadrati primi, facit triplum ſuę pyramidis.

Omnis columna pentagona ſecunda cum duplo quadrati coll. primi, & cum triangulo præcedente primo, facit triplum ſuę pyramidis.

Omnis columna hexagona ſecunda cum hexagono ſecundo & impari collaterali, facit triplum ſuæ pyramidis.

Item eadem columna cum quadrato & hexagono primis facit triplum ſuę pyramidis.

Omnis columna ſeptangula cum hexagono ſecundo & impari collateralibus, & cum triangulo primo pręcedenti facit triplum ſuę pyramidis.

Omnis columna octangula cum hexagono ſecundo & impari collateralibus, duploque trianguli pręcedentis primi, facit triplum ſuę pyramidis.

DE SOLIDIS REGVLARIBVS.

TETRAHEDRVM seu Pyramis construitur ex unitate, cum quatuor radicibus præcedentibus, cum sexcuplo trianguli primi, uno retrorsum intermisso, accepti: & cum quadruplo pyramidis triangulæ secundæ præcedentis.

Cubus, construitur ex unitate cum octo radicibus præcedentibus, cũ duodecuplo trianguli primi, uno retrorsum intermisso, sumpti: cumq; sexcuplo pyramidis quadratæ secundæ præcedentis.

Octahedrum construitur ex unitate, secuplo radicis præcedentis, ex duodecuplo trianguli primi, uno intermisso, recepti, & ex octuplo pyramidis triangulæ secundæ præcedentis. Quod semper exit æquale cubo prædicto.

Icosahedrum construitur ex unitate, ex duodecuplo radicis præcedentis, ex uigecuplo trianguli primi, uno retrorsum omisso, accepti: & ex uigecuplo pyramidis triangulæ secundæ præcedentis.

Dodecahedrum construitur ex unitate, ex uigecuplo radicis præcedentis, ex trigecuplo trianguli primi, uno retrorsum intercidente, occurrentis: & ex duodecuplo pyramidis pentagonæ secundæ præcedentis. Quod semper inuenitur æquale Icosahedro dudum memorato.

Item cubus, aut octahedrum prædictum (sunt enim æquales) potest aliter construi. Nam dispositis imparibus ab unitate per ordinem, unitas faciet primum cubum prædictum? tres sequentes impares secundum; quinque sequentes impares tertium; deindee septem succedentes quartum; nouem quintum. Et sic deinceps in infinitum: impares sub multitudine impari successiue coaceruando.

Adhuc idem cubus, seu octahedrum producetur ex ductu imparis collateralis in quadratum secundi generis collateralem.

Et notandum quòd talis cubus siue octahedrus semper est pyramis triangula secundi generis in locis imparibus accepta.

Præterea non omittendum est, quòd ex successiua coaceruatione taliũ cuborum siue octahedrorum ab unitate per ordinem, constituuntur Quadrati quadratorum ab unitate seriatim receptorum. Qui quidem quadrati quadratorum, seu bisquadrati producuntur ex quadratis primis in se ductis. Quod sicut hactenus ignoratum, ita posthac iucundum scitu fiet speculatiuis ingenijs.

Deniq; cum his, neq; illud subticebo, quòd Tetrahedrum superius memoratum, est & cubus mixtus quidam tertij generis, qui conflatur ex binis semper proximis cubis primi ordinis, scilicet collatera-

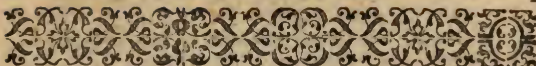
li &

li & pręcedenti. Quemadmodum quadrati ſecundi ex duobus quadratis primis, collaterali & pręcedente coaleſcunt. Quod non minus erat admirandum.

Hęc omnia in tabella pręmiſſa per exempla ſingula noteſcunt, & in primo horum Arithmeticorum libello demonſtrantur.

DE NVMERO PERFECTO.

PERFECTVS Numerus producitur ex multiplicatione ultimi in ſerie pariter parium ab unitate diſpoſitorum, in totum aggregatum ipſorum, dum tamen tale aggregatum ſit numerus primus, hoc eſt a nullo, pręterquàm unitate numeratus. Tales numeri ſemper inueniuntur in ordine triangulo & hexagonorũ primorum. In hoc numero perfecto partes integrant totum, ut oſtendit Euclides in ultima Noni. Secunda conditio faciens numerum perfectum eſt imparitas. unde impar numerus perfectior, quam par: quoniam affinitatẽ habet cum Monade genitrice numerorum, quę repręſentat Deum, Mundum, Naturam, Solem, & quidquid unicum eſt. Tertia Conditio, eſt poteſtas. Vnde impares numeri, quorum poteſtas & officium eſt formare numeros quadratos, perfectiores ſunt paribus, qui formant parte altera longiores. Rurſum hexagoni ęquianguli ſunt perfectiores, quàm impares communes: quoniam formant cubos. Quarta conditio, eſt forma. Vnde numeri ęquilateri perfectiores, quàm non ęquilateri. Sic quadratus perfectior, quàm altera parte longior. Et cubus perfectior, quàm ſolidus non ęquilaterus. Item Hexagonus ęquiangulus perfectior quàm hexagonus primus. Vnde prima conditio friuola eſt: quoniam nuda & expers eſt cęterarum fructuoſiorum qualitatum. Verum hęc diſcuſſio poſita eſt in poſtremo problematum Mechanicorum.



MAVROLYCI ABBATIS MESSANENSIS MATHEMATICI,

Arithmeticorum Liber Primus.

PROLOGOMENA.

CVM Euclides agat de planis, solidis, quadratis, cubisq; numeris: De cæteris alteriusmodi formis, ut triangulis, pentagonis, hexagonis & sequentibus tam superficialibus, quàm solidis; neque apud nostros, neq; apud Græcos (quem sciam) satis scripsit quispiam: nec ipse Pythagoras, siue Iamblicus, aut Nicomachus, à quibus Boëtius noster, quicquid de Arithmeticis tradidit, mutuatus est: Iordanus autem, meo quidem iudicio, melius utique egisset, si ab alijs omissa plenius tractasset, potiusquàm in repetendis ijs, quæ ab Euclide satis fuerant demonstrata, frustra insudasset: Nos igitur conabimur ea, quæ super hisce numerarijs formis, nobis occurrunt, exponere: multa interim faciliori via demonstrantes, & ab alijs authoribus aut neglecta, aut non animaduersa supplentes. Sed iam à diffinitionibus inchoantes, reliqua commodius exequemur.

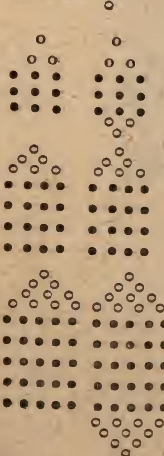
Trianguli. Quadrati.

ARITHMETICORVM DIFFINITIONES.

Vnitas est principium & constitutrix omnium numerorum, constituens autem imprimis seipsam. Omnis igitur numerus aut est vnitas, quæ respondet puncto: quamq̃ punctum non habet partem in continuis, sicut vnitas in discretis. Aut est linearis, qui respondet lineæ. Aut superficialis, qui respondet superficiei. Aut solidus qui solidum in geometricis imitatur Post vnitatem itaque primus linearium numerorum est Binarius: sicut linea finita duo extrema sortitur. Primus superficialium ternarius: sicut Triangulum figurarum geomeotricarum prima est. Primus solidorum quaternarius: quoniam pyramis triangula in numeris, sicut eadem in continuis solidis prima est. Sicut igitur monas pũcto: ita dias lineæ: Trias superficiei, ac tetras solido assimilatur. Linearium numerorum, Par est quẽ Binarius metitur. Impar vero, qui pari vnitatem addit, vel minuit. Superficialium autem primi generis numerorum, alij trianguli sunt; Alij quadrati, Alij pentagoni, Alij Hexagoni, & Hexagonorum, alij Tetragonici. alij Aequianguli, à forma scilicet, in qua disponuntur, numeroq; angulorum aut laterum vocati. Radices numerorum sunt q̃ ab vnitate, & secundum vnitatis cremẽtum successiue accrescunt. Triangulus numerus est, in primo genere, q ex aggregatione radicum ab vnitate acceptarum constitutus triangulá formam acquirit. Quadratus autem, qui ex radice in se ducta procreatur. Pentagonus verò, qui ex quadrato, & triangulo præcedenti coniunctis quinque lateram acquirit figuram. Hexagonus tandem, qui pentagono adhuc triangulũ adiungens, sextum lucrifacit latus Hæ itaque figuræ ex triangulis, & quadratis compaginantur. Nam Hexagonus æquiangulus ex vnitate & sex multiplicato triangulo construitur. Ex his superficialibus formis totidem Pyramides, totidemque colũnę conficiuntur, qui solidi numeri merito vocantur. Nam Pyramis triãgula ex aggregatione triangulorum ab vnitate per ordinẽ sumptorum fabricatur. Similiter & Pyramis quadrata, ex cumulo quadratorum: Pentagona, Pentagonorum: & Exagona, exagonorum ab vnitate continuatim sumptorum erigetur. Vnde, & duplex erit hexagona Pyramis, scilicet à suis singulæ hexagonis constructæ. Columna verò triangula ex ductu radicis in suum triangulum. Quadrata quæ cubus vocatur; ex ductu radicis in suum quadratum. Pentagona, ex ductu radicis in Pentagonum. Et hexagona vtriusque speciei ex radice

Radices.	Pares.	Impares.
1.	0.	1.
2.	2.	3.
3.	4.	5.
4.	6.	7.
5.	8.	9.
6.	10.	11.
7.	12.	13.
8.	14.	15.
9.	16.	17.
10.	18.	19.

Pentagoni. Hexagoni Tetragonici.



in hexagonum multiplicata procreabitur. Sunt & numeri parte altera longiores, quorum quilibet fit ex ductu collateralis radicis in præcedentem. His ita se habẽtibus, dicendum est de eorum proprietatibus & colligantijs.

Hexagona æquianguli.

Scholium.

Ab his propagantur quincuplices Pyramides, & totuplices columnæ, in quibus omnibus positio vnitatum, aut triangularem, aut tetragonam seruat formam. Sed hexagonus æquilaterus hìc reponi dignus est visus, propter colligantiam, quam cum primo hoc genere formarum seruat: Reponetur & in secundo mox genere, quandoquidem construitur ex centrali vnitate, & ex triangulo in laterum numerum ducto, hoc est sexcuplicato: & ipsius tam pyramis, quàm columna semper habet pro axe linearem numerum, siue radicem collateralem ex centralibus scilicet vnitatibus superficierum compositam. Quæ omnia hìc in tabella per numerarios characteres, tam ad diffinitionum, quàm ad demonstrandorum exempla exarabimus, ab vnitate vsque ad denarium procedere contenti.

FORMÆ NVMERARIÆ PRIMI GENERIS.

1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	3	4	2	5	6	4	5	6	7	8	10	12	7	14
3	4	5	6	9	6	12	15	10	14	18	22	27	36	45	19	57
4	6	7	10	16	12	22	28	20	30	40	50	64	88	112	37	148
5	8	9	15	25	20	35	45	35	55	75	95	125	175	225	61	305
6	10	11	21	36	30	51	66	56	91	126	161	216	306	396	91	546
7	12	13	28	49	42	70	91	84	140	196	252	343	490	637	127	889
8	14	15	36	64	56	92	120	120	204	280	372	512	736	960	169	1352
9	16	17	45	81	72	117	153	165	285	405	525	729	1053	1377	217	1953
10	18	19	55	100	90	145	190	220	385	550	715	1000	1450	1900	271	2710
Radices.	Pares.	Impares.	Trianguli.	Quadrati.	Parte altera longiores	Pentagoni.	Hexagoni pi.	Pyrdes △la.	Pyrdes quadratę	Pyramides pętag. olim △la	Pyramides hexag. primæ.	Cubi colum. quadratæ pyramides hexag. æquiangula.	Columnæ pentagonæ.	Columnæ hexagonæ primę.	Hexa. æquianguli.	Columnæ hex. æquiangulæ.

PROPOSITIO PRIMA.

QVOT *vnitates habet numerus quilibet, totum in ordine radicum locum sortitur. Et è contrario, quotum in radicibus locum obtinet quiuis numerus, tot quoque complectitur vnitates.* Nam radices ab vnitate exordium capientes per singulos locos singulas acquirunt vnitates. Quapropter millenarius numerus, quoniam ex mille constat vnitatibus, millesimus est in ordine radicum: Et viciſſim numerus, qui millesimum in radicibus locum sortitur, mille comprehendet vnitates, hoc est millenarius ipse numerus erit. Et hoc
2ª est quod proponitur demonstrandum.

Omnis datus numerus inuenitur in ordine radicum. Esto datus numerus a. quicunque sit, aio quòd a. numerus inuenitur in ordine radicum omnino. Habeat enim a. quotuis vnitates, vtputa mille. iam enim per præcedentem a. numerus millesimum obtinebit in radicibus locum. Quod est
3ª propositum.

Radices singulæ duplicatæ constituunt pares singulos per ordinem. Nam talia dupla mensurantur à binario: quandoquidem per binarium multiplicantur: & ideo per diffinitionem sunt ipsi pares numeri; quorum primus semel, secundus bis, tertius ter; & sic deinceps à binario mensu-
4ª rantur.

Impares ab vnitate per binarij appositionem succeſſiue fiunt. Nam vnitas binario apposita, per differen. facit imparem, scilicet ternarium: Sed per præmiſſam pares numeri propagantur à binario per binarij crementum: & per differen. impares addunt paribus singuli singulis vnitatem: Igitur impares propagabuntur à ternario per idem binarij crementum (vt singuli singulos impares
5ª vnitate semper excedant.) Quod est propositum.

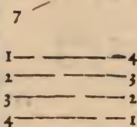
In ordine radicum impares & pares alternatim & inuicem succedunt. Nam, per præmiſſam, impares ab vnitate per binarium crescunt; quo fit vt in radicibus, vnitas, & vno semper intermiſſo numero, sequẽtes sint impares: per antepmiſſam verò, pares à binario per binarium crescunt; quare in radicibus binarius, & vno semper intermiſſo, sequentes sunt pares. Sic ergo fit, vt impares, in imparibus, pares semper in

locis

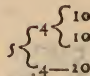
locis, paribus radicum inueniantur alternatim, ſicut proponitur.

Omnis radix cum radice præcedenti, facit ſibi collateralem imparem: cum ſequenti verò ſequentem. 6 Nam binarius cum vnitate facit ternarium: cùm ternario autem iunctus, facit binario maiorem: & ideo imparem ſequentem ſcilicet 5. per quartam præmiſſam. Rurſus, cùm ternarius coniunctus cum binario, faciat quinarium, imparem ſibi collateralem: Iam idem cum quaternario radice ſequenti faciet binario maiorem, hoc eſt, imparem ſequentem, per quartam præcedẽtem, qui ſeptenarius eſt. Eodemque modo in infinitum, ſicut propoſitio concludit.

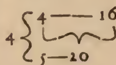
Omnis radix multiplicata in radicem ſequentem, producit duplum trianguli ſibi collateralis. 7 Exempli gratia, ducatur quaternarius in ſequentem radicem, ſcilicet quinarium: & producuntur 20. Aio, quòd 20. duplus eſt ad triangulum ipſi quaternario collateralem. Sumantur enim ab vnitate ad quaternarium radices: quibus applicentur totidem & ordine præpoſtero ab vnitate radices, ſingulæ ſingulis: ſic enim fiet vt creſcentes cum decreſcentibus ſinguli ſingulis coniuncti numeri faciant quatuor ſummas æquales: hoc eſt quatuor quinarios. quare earum aggregatum erit planus numerus, qui fit ex ductu quaternarij in quinarium: & idcirco 20. erit talis planus. Duplus autem eſt planus ipſe ad triangulum quaternarij: quandoquidem, per diff. talis triangulus eſt aggregatum vnius dictorum ordinum: quod eſt dimidium plani: Igitur 20. duplus erit ad triangulum quaternarij. Et ſimiliter in omni caſu id quod proponitur demonſtrabimus.



Omnis triangulus duplicatus, efficit numerum parte altera longiorem ſequentem. 8 Exempli gratia, triangulus quarti loci, eſt denarius. Aio, quòd 10. duplicatus efficit parte altera longiorem quinti loci. Nam per diff. talis parte altera longior producitur ex radice collaterali in præcedentem: ſcilicet ex 5. in 4. Sed per præmiſſam ex ductu 4. in 5. fit duplum trianguli quarti: Ergo tale duplum æquale eſt, parte altera longiori quinti loci. quod eſt propoſitum.



Omnis quadratus cum radice ſua coniunctus, conficit ſequentem parte altera longiorem. 9 Exempli gratia, quadratus quarti loci eſt 16. eiuſque radix 4. Aio, quòd ſexdecim cum quatuor conficit parte altera longiorem quinti loci.



Nam per diffinitionem 4. multiplicatus in 4. producit quadratum suum scilicet 16. Et idem 4.ductus in 5. sequentem radicẽ, producit parte altera lõgiorem quintum, scilicet 20. Sed talia duo producta differunt quaternario: quoniam multiplicantes differunt vnitate. Igitur 16. cum 4. efficit 20. hoc est, quadratus cum radice parte altera longiorem quintum. quod fuit demonstrandum.

10ª *Omnis parte altera longior cum radice collaterali coniunctus, conflat collateralem quadratum.* Exempli gratia: Parte altera longior quinti loci est 20. Aio, quòd 20. cum 5. facit quadratum quintum. Nam, per diffi. talis parte altera longior fit ex 4. in 5. dictus verò quadratus fit ex 5. in se. Sed talia producta differunt quinario multiplicante: quoniam multiplicati differunt vnitate. Igitur 20. cum quinario conficit reliquum productum, scilicet quadratum quinarij: quod fuit demonstrandum.

5 { 4 — 20 ; 5 — 25 }

11ª *Omnis triangulus cum præcedenti triangulo coniunctus perficit quadratum sibi collateralem.* Exempli gratia: Triangulus quintus scilicet 15. cum triangulo præcedenti scilicet 10. perficit quadratum quintum. Nam, 15. per diff. trianguli constat ex præcedenti Δ^{lo} & radice 5. Igitur aggregatum taliũ duorum triangulorum cõstat ex tali radice, & duplo Δ^{li} præcedentis, hoc est, ex 5. & duplo ipsius 10. Sed duplum ipsius trianguli 10. per antepræmissam est parte altera lõgior quintus: Ergo dictum triangulorum aggregatum, æquale erit aggregato ex parte altera longiore quinto, & ex radice quinta. Per præcedentem autem, parte altera longior quintus cum radice 5ª conflat quintum quadratum: Igitur dictum triangulorum 15. & 10. aggregatum, perficit Quadratum quintum: quod est propositum.

20 { 10 ; 10, 5 } 15 ; 25

12ª *Omnis quadratus cum radice sua, & cum radice sequenti coniunctus, consummat quadratum sequentem.* Exempli gratia: Quadratus quarti loci scilicet 16. cum radice sua scilicet 4. & cum radice sequenti 5. compositus, consummat quadratũ sequentis loci scilicet 25. Nam per nonam præcedentem, quadratus quartus cum radice sua coniunctus, efficit quintum parte altera longiorem: per decimam verò præmissam, quintus parte altera longior conflet iunctus cum quinta radice, quintum quadratum. Igitur quartus quadratus cum 4ª & 5ª radicibus acceptus conficit □^{tũ}. quintum: sicut proponitur.

20 { 16 ; 4 } 25 ; 5

Omnis

Omnis quadratus cum impari ſequente coniunctus, conſtituit quadratum ſequentem. Exempli gratia: Quartus quadratus ſcilicet 16. cum impare quinti loci, ſcilicet cum 9. coniunctus, efficiet quintum quadratum. Nam per ſextam præmiſſarum, radix quarta cum quinta componunt imparem quintum: cumque per præcedentem, quadratus quartus, cum quarta & quinta radicibus, pariter ſumptus, efficiat quadratum quintum, ſequitur; vt idem quadratus quartus cum impare quinto, hoc eſt 16. cum 9. conſtituat quadratum quintum ſcilicet 25. ſicut concludit propoſitio. 13^a

Omnis quadratus cum duplo ſuæ radicis & vnitate coniunctus conſtruit quadratum ſequentem. Exempli gratia: Quartus quadratus ſcilicet 16. cum duplo ſuæ radicis, hoc eſt, cum 8. & vnitate coniunctus efficit quadratum ſequentem. 14^a

Nam per 3^a huius, duplus radicis quartæ, eſt par quinti loci: cui ſi addatur vnitas, fit per diff. impar quintus. Igitur talis duplus cum vnitate, eſt impar quintus. Verùm, per præcedentem, quartus quadratus cum quinto impare conſtituit $\square^{tu}$ ſequentem. Igitur & quartus quadratus cum dicto duplo & vnitate coniunctus: hoc eſt, 16. cum 8. & 1. conſtruit quadratum quintum ſcilicet 25. quod eſt propoſitum.

Ex aggregatione imparium numerorum ab vnitate per ordinem ſucceſſiuè ſumptorum, conſtruuntur quadrati numeri continuati ab vnitate, ipſiſq; imparibus collaterales. Nam per antepræmiſſam, vnitas imprimis cum impari ſequente facit quadratum ſequentem ſcilicet, 4. Et ipſe 4. quadratus ſecundus, cùm impari tertio ſcilicet 5. facit quadratum tertium, ſcilicet 9. Itemque 9. quadratus tertius cum impari quarto ſcilicet 7. facit quadratum quartum, ſcilicet 16. & ſic deinceps in infinitum, ſemper 13ª repetita propoſitum demónſtratur. 15^a

Omnis Pentagonus conſtituitur ex triangulo & parte altera longiore collateralibus coniunctis. Nam per diffinitionem ipſe, exempli gratia, pentagonus quartus, 22. fit ex $\square^{to}$ 4° & $\triangle^{lo}$ tertio coniunctis, hoc eſt ex 16. & 6. Sed per 10ª huius, parte altera longior quartus, ſcilicet 12. cum radice quarta, ſcilicet 4. conficit $\square^{tu}$ quartum. Et per diff. trianguli, triangulus quartus conſtat ex $\triangle^{lo}$ 3° & ex radice quarta. Igitur & Pentagonus quartus conſtituetur ex parte altera longiore quarto, ſcilicet 12. & ex $\triangle^{lo}$ quarto ſcilicet 10. ſicut proponitur demonſtrandum. 16^a

17 *Omnis item pentagonus conſtruitur ex triplo præcedentis trianguli,& ex collaterali radice,coniunctis.* Exempli gratia: pentagonus quartus. ſcilicet 22. fit ex triplo tertij △li, ſcilicet ex 18.& ex radice 4a .ſ.4. Nam per diffinitionem,pentagonus quartus ſcilicet 22.fit ex △lo pręcedenti tertio & ex quadrato quarto. Quadratus autem quartus ſcilicet 16.per 11a huius, conſtat ex △lo tertio 6. & ex △lo quarto 10.coniunctis: & △lo quartus ex diff.△li, conſtat ex △lo tertio, & ex radice 4a coniunctis.Igitur & Pentagonus 4s conſtabit ex tribus triangulis tertijs,& ex radice quarta:quod eſt propoſitum. Vel ſic:quoniam per præcedentem, Pentagonus 4s conſtabat ex parte altera longiore quarti loci, & ex △lo quarto: & per 8a huius, parte altera longior 4s æquiualet duobus triangulis tertijs: & △lo quartus æquiualet △lo 3o & radici quartæ:iam & pentagonus 4s æquiualebit tribus △lis tertijs & radici 4æ quod eſt propoſitum.

22 { 16 { 6, 6, 4 } 10; 6, 6 }

22 { 12 { 6, 6 }; 10 { 6, 4 } }

18 *Omnis hexagonus primus conſtat ex præcedenti triangulo,& inſuper ex ijs omnibus, ex quibus collateralis pentagonus conſtare oſtenſus eſt.* Nam, cùm per diffinitionem pentagonus, vnà cum præcedenti triangulo conſtituat collateralem hexagonum, ſequitur vt hexagonus ipſe conſtet ex dicto iam triangulo, & ex iis ſimul,ex quibus per duas præcedentes, conſtare oſtenſus eſt Pentagonus. Sicut proportio præſens concludit.

19 *Omnis hexagonus fit ex quadrato collaterali, duploque præcedentis trianguli.* Exēpli gratia, hexagonus primus quarti loci ſcilicet 28.fit ex quadrato quarto,ſcilicet 16.& duplo præcedentis trianguli,ſcilicet 6. Nam per diffini.hexagonus conſtat ex pentagono collaterali, & ex præcedenti △lo. Pentagonus autem ex quadrato, & ex præcedenti triangulo. Igitur hexagonus conſtabit ex quadrato,& ex duobus præcedentib. triangulis:quod eſt propoſitum.

16, 6 } 22; 22, 6 } 28

20 *Omnis radix ducta in imparem collateralem producit hexagonum primum collateralem.* Exempli gratia: radix quarta ſcilicet 4.multiplicans quartum imparem,ſcilicet 7.facit collateralem hexagonum primum,ſcilicet 28. Nam radix 4. in ſe ducta,facit quadratum 4m ſcilicet 16. Et eadem radix 4. in præcedentem radicem ſcilicet 3.ducta facit per 7a huius, duplum trianguli tertij, ſcilicet 6. Sed per præcedentem, tale □tũ cum duplo talis trianguli perficiunt ſimul hexagonum primum 4i loci.Ergo radix 4.ducta in ſe,& ducta in 3.hoc eſt

4 { 4—16; 3 { 6, 6 } }

ducta

ducta in 7. 4^{a} imparem, per 6^{a} huius, procreabit hexagonum primum 4^{i} loci; quod est propositum.

Si ex radicibus ab vnitate dispositis sumantur tres, vel quinq; vel septem, vel sub quauis impari multitudine ab vnitate continuati numeri: tunc illorum aggregatum æquale erit ei, qui fit ex ductu medij in postremum. 21
Exempli gratia: capiantur septem radices sic 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. quorum medius est 4us scilicet 4. Aio igitur, quod horum 7. numerorum aggregatum æquale erit ei quod fit ex multiplicatione medij scilicet 4. in postremum scilicet 7. quod sic ostenditur. Associentur propositis radicibus totidem singuli singulis æquales, sed ordine præpostero, applicati numeri: sic fiet, vt crementa decrementis compensata faciant combinationes singulas æquales: vtque bini medij ab extremis æquidistantes scilicet 4. & 4. sint inuicem æquales. Quare congeries totalis amborum ordinum erit planus numerus, qui fit ex ductu octonarij in septenarium: quæ sunt latera plani. Igitur & summa vnius ordinis, quæ dimidiũ est totalis cumuli producetur ex 4. in 7. hoc est ex medio numerorum in postremum. Quod fuit demonstrandum.

1.7
2.6
3.5
4.4—7—28.
5.3
6.2
7.1

Omnis radix media inter vnitatem & imparem in ordine radicum, multiplicata in talem imparem, producit triangulum imparis eiusdem collateralem. 22
Exempli gratia, capiantur, sicut in præcedenti, quotuis imparis mult^{nis} radices ab vnitate cõtinuate 1.2.3.4.5.6.7. septem scilicet. Aio, quòd in his radix æqualiter remota ab vnitate & impari: vt 2. qui æquidistat ab vno, & a 3. multiplicata in 3. producit collateralem ipsius 3. triangulum. Nam, per præcedentem, 2. qui medius est ipsorum 1.2.3. trium scilicet ab vnitate radicum, ductus in postremum, scilicet 3. producit aggregatum ipsorum 1. 2. 3. Sed tale aggregatum, per diffinitionem, est triangulus collateralis postremæ radicis 3. Igitur 2. ductus in 3. producit $\Delta^{lũ}$ collateralem ipsius imparis scilicet 6. quod est propositum. Item 3. radix æquè remota ab vnitate, & à quinario ducta ĩ quinq;, producit 15. triangulum. s. collateralem quinarij: quia. s. per præcedentem procreat aggregatum ex ipsis 1. 2. 3. 4. 5. quod est ipse triangulus, sicut proponitur. Adhuc 4. radix æquè distans ab vnitate & à 7. in 7. ipsum multiplicata generat 28. $\Delta^{lũ}$. s. collateralẽ ipsius septenarij: quandoquidem per præcedentem, producit aggrauatum ex ipsis 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. ipsum videlicet triangulum. Et sic deinceps, arguendo per præcedentem, & per diff. trianguli confirmatur propositum.

1
2—3 6.
3

1
2
3—5—15
4
5

1
2
3
4—7—28.
5
6
7

Hexa-

23[a] *Hexagoni primi ab vnitate continuati per ordinem, ſunt & trianguli numeri locorum imparium.* Nam per 20[a] huius, radices ſingulæ in ſingulos impares multiplicatæ, producunt per ordinem hexagonos ipſos. At per præcedentem, radices ſingulæ in ſingulos item impares ductę, procreant triangulos imparium collaterales per ordinem. Igitur & trianguli imparium locorum ſunt & hexagoni per ordinem continuati: ſicut demonſtrandum proponitur.

COROLLARIVM.

Vnde manifeſtum eſt, quòd omnis hexagonus tetragonicus eſt & triangulus numerus.

24[a] *Omnis numerus perfectus eſt hexagonus tetragonicus ſiue primus.* Hoc nos ſic demonſtrabimus. Exponantur ab vnitate continuati numeri pariter pares, hoc eſt, in proportione continua dupla a. b. c. d. e. quorum aggregatum ſit numerus primus, qui ſit f. & ex e. poſtremo in f. producatur g. qui per vltimam noni elementorum Euclidis, erit numerus perfectus. Oſtendendum igitur eſt, quòd g. hexagonus eſt, non æquiangulus, hoc pacto. Sit ipſius e. duplus ipſe h. Et tunc ſi ab ipſo b. ſecundo, & ab ipſo h. dematur primus, ſcilicet vnitas, erit per penultimam noni prædicti, ſicut reſiduum ipſius b. ad vnitatem, ſic reſiduum ipſius h. ad aggregatum ipſorum a b c d e. Sed reſiduum ipſius b. eſt vnitas, & perinde æqualis vnitati: Igitur & reſiduum ipſius h. æquale erit aggregato ipſorum a b c d e. hoc eſt, ipſi f. Verùm ſi ab ipſo h. duplo ipſius e. & perinde numero pari ſubtrahatur vnitas, iam ſupereſt numerus impar collateralis ipſius e. in radicibus: Ergo talis impar eſt ipſe f. Quare per 20[a] huius, e. radix multiplicans ipſum f. collateralem imparem, generat hexagonum ſibi collateralem. Fuit autem tale productum ipſe numerus g. omnino igitur & g. numerus hexagonus eſt. quod demonſtrandum fuit.

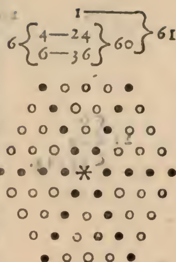
a 1
b 2
c 4
d 8
e h 16
32
f 31
g 496

25 *Omnis numerus perfectus eſt triangulus.* Nam per præcedentem, omnis numerus perfectus eſt hexagonus primus. Per corollarium autem antepræmiſſæ, omnis hexagonus talis eſt, & triangulus: Igitur & omnis numerus perfectus eſt triangulus, ſicut propoſitio concludit.

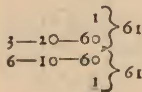
26 *Omnis radix ſexcuplicata & cum vnitate, cumq́; ſexcuplo præcedentis trianguli coniuncta, conſummat hexagonum æquiangulum ſequentem.* Exempli gratia: Sumatur 4. qui quarta

radix

radix est; & tertius triangulus, scilicet 6. Aio, quòd 4. sexcuplicatus scilicet 24. cum vnitate, & cum sexcuplo ipsius 6. scilicet 36. coniunctus, conficit hexagonum æquiangulum sequentem, scilicet 61. Nam radix quarta cum tertio triangulo, per dif. △li, conficit quartum triangolum. Igitur sexcuplum quartæ radicis cum sexcuplo tertij △li. simul efficiunt sexcuplum quarti trianguli. Quare vnitas cum sexcuplo 4æ radicis, & sexcuplo tertij trianguli simul, sunt æqualia aggregato ex vnitate & sexcuplo quarti trianguli. verùm tale aggrauatum, per diffinitionem ipsius hexagoni, constituit ipsum hexagonum quintum. Ergo hexagonus quintus construitur ex vnitate, sexcuplo radicis quartę, & sexcuplo tertij △li. quod est propositum.



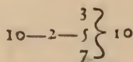
27 *Omnis parte altera longior triplicatus & cum vnitate coniunctus, conficit hexagonum æquiangulum collateralem.* Exempli gratia: Quintus parte altera longior est 20. huius triplum scilicet 60. cum vnitate efficit quintum, de quo loquimur, hexagonum scilicet 61. Nam per diffi. Hexagonus quintus constat ex vnitate & sexcuplo 4i trianguli, scilicet 10. Quintus autem parte altera longior, per 8a huius, constat ex duobus quartis triangulis. Sequitur ergo, vt sex quarti trianguli æqualeant tribus parte altera longioribus quinti loci: vtq; hexagonus quintus confletur ex tribus parte altera longioribus & ex vnitate: sicut proponitur.



COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd omnis quadratus cum radice sua coniunctus & inde triplicatus, ac mox cum vnitate positus, conficit hexagonum æquilaterum sequentem. Nam per nonam huius, quadratus cum radice sua æqualet parte altera longiori sequenti. vnde corollarium constat ex præmissa.

28 *In tribus numeris æquali excessu crescentibus, congeries extremorum æqualis est duplo medij.* Exempli gratia, tres numeri 3. 5. 7. binario crescentes sint. Aio quòd extremi scilicet 3. cum 7. faciunt duplum ipsius 5 Nam, quanto 3. minor est quàm 5. tanto 7. maior, quæ 5. per hypothesim. Excessus itaque binarij resarcit eiusdem defectum; & perinde excedens cum deficiente, hoc est tertius cum primo faciunt duplum medij: quòd est propositum.



In tribus

29 *In tribus triangulis continuatis in ordine triangulorum, congeries extremorum vnitate excedit duplum medij.* Exempli gratia, tres capiantur continui trianguli, vtputa tertius, quartus, & quintus scilicet 6.10.15. Aio, quòd extremorum 6.& 15. vnitate superat duplum medij scilicet ipsius 10. Nam in his quartus Δ^li^ sua radice excedit tertium, hoc est, quaternario: Quintus autem quartum quinario, sicut ratio diffinitionis postulat. Minuatur vnitas de quinto: & superest 14. fietque vt 6.10.14. æquali cremento procedant: scilicet quaternario crescentes. Quare, per præmissam 6. cum 14. duplum faciũt ipsius 10. Igitur 6. cum 15. vnitate duplum prædictum excedẽt. & similiter hoc ipsum in omnibus tribus continuatis Δ^lis^ ostendam: sicut demonstrandum proponitur.

21 { 6, 10, 15. 14.

PROPOSITIO 30ª.

Omnis triangulus quadruplicatus & cum vnitate coniunctus, efficit aggregatum collateralis & sequentis quadratorum. Exempli gratia: triangulus 4^s^, scilicet 10. quadruplicatus cum vnitate facit 41. aggregatum scilicet quadratorum quarti & quinti. Applico enim Δ^lo^ proposito præcedentem Δ^lũ^ & sequentem, scilicet tertium & quintum sic 6.10.15. atque ita per 11ª propositionem huius, constabit, quòd quartus quadratus fiet ex congerie ipsorum 10.& 6. quarti & tertij triangulorum: Et similiter, quòd quintus quadratus fiet ex cumulo ipsorum 15.& 10. quinti & quarti Δ^lorum^ Quo fit, vt aggregatum talium quarti & quinti quadratorum, quod est 41. constet ex congerie Δ^lorum^ extremorum. & ex duplo medij: Sed per præcedentem, congeries extremorum æquiualet duplum medij & vnitatẽ. Igitur aggregatum ex quarto & quinto quadratis constabit ex quadruplo Δ^li^ medij & ex vnitate. Hoc est, ipse Δ^lo^ medius, quartus in hoc casu, scilicet 10. quadrupliciter cum vnitate conficiet aggregatum ex quarto, & quinto quadratis 25. scilicet & 16. sicut demonstrandum proponitur.

6, 10, 15 } 16, 25 } 41

PROPOSITIO 31ª.

Omnis quadratus cum præcedenti quadrato, & cum sibi collaterali parte altera longiori coniunctus, consummat hexagonũ æquiangulum sibi collateralem. Exempli gratia: Quadratus quintus est 25. quartus præcedens 16. parte altera longior quintus 20. Aio, quòd horum aggregatum consummat hexagonum æquiangulum quintum. Nam, per præmissam, aggregatum ex quinto & quarto quadratis, æquiualet quadruplo trianguli quarti cum vnitate iuncto. Per octa-

16, 25 } 41; 20—20 } 61

uam

uam autem huius, parte altera longior quintus æquiualet duplo trianguli quarti. Ergo aggregatum ex quinto & quarto quadratis, & ex parte altera longiori quinto, æquiualet sexcuplum trianguli quarti & vnitatem. verùm tale sexcuplum cum vnitate cõstituit hexagonum æquiangulum quintum, sicut eius diffinitio supponit: Igitur hexagonus æquilaterus quintus consummabitur ex aggregato quinti & quarti quadratorum, & quinti parte altera longioris: quod fuit ostendendum. Similiter in omni casu procedam propositum demonstrans.

PROPOSITIO. 32ª.

Omnis hexagonus tetragonicus cum præcedenti quadrato coniunctus complet hexagonum æquiangulum sibi collateralem.

Nam, nisi diffinitiones oblitus es, Hexagonus tetragonicus siue primi generis vocetur, constituitur ex quadrato collaterali, & ex duplo $\triangle^{li}$ præcedentis: Exempli gratia hexagonus talis quinti loci, scilicet 45. fit ex quinto quadrato 25. & ex duplo trianguli quarti 10. Sed tale duplum, per octauã huius, est parte altera longior quintus scilicet 20. ergo hexagonus tetragonicus quintus æquiualet aggregatũ ex quinto quadrato, & quinto parte altera longiore. verùm per præmissam quintus quadratus, cum quarto quadrato & cum quinto parte altera longiore consummat hexagonum æquilaterum quintum. Igitur hexagonus tetragonicus quintus cum quadrato quarto conflabit hexagonum æquiangulum quintum: quod fuit demonstrandum. Et similiter in omni casu demonstrabo propositum.

45 { 10, 10 } 20; 25; 16 } 61

PROPOSITIO. 33ª.

Sunt plerique numeri quadrati, qui coniuncti quadratum numerum faciunt. Sumatur enim quilibet in ordine imparium quadratus: namque his cum præcedenti quadrato in ordine quadratorum sumpto cõiunctus, per 13ª huius, quadratum conficit. Exempli gratia. 9. quadratus, quintus in ordine imparium, cum quadrato quarto 16. conficit 25. quadratum quintum. Item 25. quadratus, tredecimus impar cum duodecimo quadrato scilicet 144. coniunctus, conficit 169. quadratum videlicet tredecimum. Idemque semper fit in oĩ quadrato impari. Constat ergo per 13ª veritas propositi. Et aliter sic: sumantur duo inæquales quadrati numeri, aut ambo pares, aut ambo impares, siue duo plani similes a b. & b c. qui cũ parem numerum faciant, iam totius a c. dimidius par erit.

9, 16 } 25

25, 144 } 169

a	b	d	c
9	.	5	17

e 225 f 64 g 289

par erit. Esto igitur ipse dimidius a d. qui iam excedit ipsum a b. numerum ipso b d. ducatur numerus a b. in ipsum b c. & fiat e. igitur quadratus numerus erit e. per primam noni elemẽtorum. Quandoquidem ex ductu quadratorum seu similium planorum fit. Sit deinde □tus ipsius b d. ipse f. numerus. Ac deniqne ipsius a d. vel d c. quadratus ipse g. numerus. Sic enim, per quintam secundi elementorum ad numeros redactam, constabit quòd ipsorum, e f. quadratorum agregatum est æquale ipsi g. quadrato. Cõstat ergo rursus propositũ.

PROPOSITIO 34a.

Omnis pyramis triangula cum præcedenti pyramide triangula coniuncta, construit pyramidem quadratam sibi collateralem. Nam facilitatis gratia, capiatur pyramis quinta constans per diff. ex quinque triangulis. 1.3.6.10.15. & pyramis quarta cõstans ex 4or triangulis. 1.3.6.10. Aio, quòd horũ aggregatum facit pyramidem □ti quinta. Nam per 11a huius, secundus triangulus ab vnitate scilicet 3. cum vnitate facit 2ũ quadratum scilicet 4. Item 2s & 3s trianguli, scilicet 3. & 6. faciunt 3ũ □tũ scilicet 9. Item 3s & 4s △li scilicet 6. & 10. faciunt 4ũ □tũ scilicet 16. Adhuc 4s & 5s triãguli 10. scilicet & 15. faciũt quintum quadratum 25. igitur vnitas, & aggregata talium quadratorum consumant quinque per ordinem ab vnitate quadratos: & ideo, per diffin. construunt ipsam □ti quintam pyramidem: idemque similiter, in omni exemplo, cuiuslibet pyramidis △li & præcedenti demonstrabo, per 11a huius arguendo toties, quoties combinãtur △li. Quare pyramis quinta △la scilicet 35. cum præcedenti pyramide △la scilicet 20. construũt 55. pyramidem □ti quintã. Quod est propositum.

	1 ..	1
1—	3 ..	4
3—	6 ..	9
10—	15 ..	16
10—	15 ..	25
20.	35.	55

PROPOSITIO 35a.

Omnis pyramis pentagona constituitur ex pyramide triangula collaterali, & ex duplo præcedentis. Cum per diff. Pentagona pyramis construatur ex pentagonis ab vnitate per ordinẽ aggregatis: iã, exẽpli grã, quinta pyramis pentagona constabit ex vnitate, & quatuor sequentibus pentagonis superficialibus. Quatuor aũt tales pentagoni, per diffin. fiũt ex coniunctione quatuor collateralium quadratorum, & quatuor præcedentium △lorũ singuli singulorum. Quadrati quoque tales 4or per 11a huius constãt ex coniunctione quatuor collateralium △lorũ & totidem præcedentium △lorũ. igitur quinta pyramis pentagona constabit ex aggregatione vnitatis quatuor sequentium triangulorum, duplici totidem præcedentiũ triangulorum.

		1—	1
1.	1.	3—	5
3.	3.	6—	12
6.	6.	10—	22
10.	10.	15—	35
20.	20.	35—	75

gulorum. Sed per diffi. vnitas, & quatuor ſequentes Δ^{li} faciũt pyramidem $\Delta^{lã}$ quintam: & quatuor præcedentes Δ^{li} faciunt Δ^{la} pyramidem quartam. Ergo quinta pyramis pentagona conſtruetur ex aggregatione pyramidis $\Delta^{læ}$ quintæ, duploque $4^{æ}$. Quod eſt propoſitum. Similis eſt cœterorum locorum demonſtratio.

PROPOSITIO 36^{a}.

Omnis pyramis pentagona conflatur ex pyramide quadrata collaterali, & ex pyramide Δ^{la} præcedenti. Nam, cum exempli gratia, pyramis pentagona 5^{a} per præcedentem, æquiualet aggregato ex quinta Δ^{la} pyramide, & ex duplo pyramidis $\Delta^{læ}$ quartæ: & per ante præmiſſam, pyramidis $\Delta^{læ}$ quintæ, & pyramidis triangulæ quartæ cumulus conſtruat pyramidem quadratam 5^{a}, ſequitur vt cõgeries pyramidis quadratę, quintę cum pyramide triangula quarta conficiat pyramidem pentagonam 5^{a}. & ſimili argumento omnis pyramis pentagona fiet ex pyramide □ra collaterali, & ex pyramide quadrangula præcedentis, ſicut proponitur.

75 { 20, 20 } 55; 35

pyr. pē tag. 5. { 4. pyr. Δ^{la} / 4. pyr. Δ^{la} } 5. pyram. triág. / 5. pyra. triang.

PROPOSITIO 37^{a}.

Omnis pyramis hexagona tetragonica conſtituitur ex pyramide pentagona collaterali, & ex pyramide triangula præcedenti. Exempli gratia, oſtendam ꝙ pyramidis hexagona quinta æqualet aggregato duarum pyramidum, ſcilicet pentagonæ collateralis, & triangulæ quartæ: ſic per diffin. pyramidis hexagona quinta coaleſcit ex vnitate & ex quatuor hexagonis ſuperficialibus ſequentibus: tales autem hexagoni, per diff. ſinguli ex quatuor pentagonis collateralibus, & ex totidem præcedentibus triangulis. Cumque vnitas & quatuor pentagoni ſequentes, per differen. faciant quintam pyramidem pentagonam: quatuorque trianguli præcedentes conficiant quartam pyramidem triangulum: Iam, pyramis hexagona quinta, ſcilicet 95. conflabitur ex Pyramide pentagona quinta ſcilicet 75. & ex pyramide triangula quarta, ſcilicet 20. & ſimiliter per aliis locis accommodabitur demonſtratio propoſiti.

	1	1
1.	5	6
3.	12	15
6.	22	28
10.	35	45
20.	75.	95.

PROPOSITIO 38^{a}.

Omnis pyramis hexagona tetragonica conſtat ex pyramide triangula præcedenti, & inſuper ex ijs, ex quibus pentagona pyramis collateralis cõſtare oſtenſa eſt. Cũ enim, per præcedẽtem, pyramidis hexagona, exempli gratia, quinti loci cõſtet ex Δ^{la} pyramide 4^{a} & ex pyramide pentagona q̃nta, & pẽtagona

pyramides

35 pyramidis quinta, per 35ª constet ex pyramide triangula
20 quinta,& ex duplo pyramidis triãgulæ quartæ. Iam sequitur
95 10 vt pyramidis hexagona quinta constet ex pyramide triangula
20 quinta,& ex triplo pyramidis triangulę 4ª. Et similiter,cum
per ante præmissam pyramis pentagona 5ª constetur ex py-
55 ramide □ta quinta, & ex pyramide triangula quarta: & per
95 20 præmissam pyramis hexagona 5ª superaddat pyramidi pen-
20 tagonæ 5ª pyramidem triangulam quartam: non minus se-
quitur vt pyr^is hexagona quinta æquiualeat aggregatum ex
pyr^de quadrata quinta, duploq; triãgulæ pyramidis quartæ:
sicut præsens propositio concludit.

PROPOSITIO. 39ª.

Omnis pyramis hexagona æquiangula constat ex radice collaterali,tanquàm axe, & ex pyramidis triangulæ præcedentis sexcuplo. Hæc propositio facillime demonstratur ea ipsius
1. pyramidis hexagonæ,& hexagoni sui diffinitionibus. Exẽpli
1. 6. 1.7. gratia, pyr^is hexagona æquiangula 5ⁱ loci, scilicet 125. per
6 3. 18.1.19. diff. constat ex vnitate & ex quatuor sequentibus hexagonis
6. 36.1.37. æquiangulis. tales autem hexagoni per diff. singuli constant
10.60.1.61. ex singulis vnitatibus & ex præcedentibus △^lis singulis sexcu-
plicatis. Verùm singuli tales △^li (qui sunt quatuor ab vni-
125. tate,construunt, per diff.pyramidem triangulam 4ª. & per-
inde sexcuplicati construunt sexcuplum pyramidis triangu-
læ quartæ. Igitur dicta pyramis hexagona 5ª constabit ex
quinque vnitatibus, 5ª scilicet radice, & ex pyramidis triangulæ quartæ sexcuplo: estque talis radix quasi axis ipsius pyramidis constans ex vnitate verticali, ac quatuor vnitatibus centralibus hexagonorum pyramidem ipsam integrantium. Et similiter per quotcunque pyramide, sicut pro 5ª factum est, ratiocinari possumus ad demonstrationem propositi.

PROPOSITIO. 40ª.

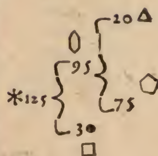
Omnis pyramis hexagona æquiangula construitur ex aggregato pyramidis hexagonæ tetragonicæ collateralis & præcedentis pyramidis quadratæ. Exempli gratia: pyramis hexagona
1—1
1. 6—7 æquiangula 5ⁱ loci fiet ex congerie pyramidis hexagone te-
4. 15—19 tragonicæ 5ª, & pyramidis □tæ quartæ.Nã per diffi.pyramis
9. 28—37 hexagona æquiangula 5ª constat ex vnitate & ex 4^or sequen-
16.45—61 tibus hexagonis æquiangulis. Tales autem 4^or hexagoni sin-
30.95—125 guli,per 32ª huius propositionem, constat ex singuls hexagonis tetragonicis collateralibus, & ex singulis quatuor præcedentibus quadratis. Verùm vnitas cum quatuor dictis

hexagonis

hexagonis tetragonicis construunt, per diffi pyramidem hexagonam tetragonicam quintam : & dicti quatuor quadrati ab vnitate, constituunt pyramidem quadratam quartam. Igitur pyramis hexagona æquiangula quinta cōflabitur ex pyramide hexagona tetragonica quinta, & ex pyramide quadrata quarta: quod erat demonstrandum. Similiter per 32ª & diffinitiones in cæteris locis, verificatur propositum.

Propositio 41ª.

Omnis pyramis hexagona æquiangula æqualis est aggregato trium pyramidum, scilicet pentagonæ collateralis, ac triangulæ & quadratæ præcedentium. Exempli gratia, dico quòd pyramis hexagona æquiangula quinti loci.s. 125. æquiualet tres pyramides.s. pentagonam quintam 75. vnà cum triangula quarta, scilicet 20. & quadrata quarta, scilicet 30. Nam per præcedentem, pyramis hexagona æquiangula quinta æquiualet duas pyramides, scilicet hexagonam tetragonicam collateralem 95. & quadratam quartam, scilicet 30. Per 37ª autem propositionem huius, hexagona tetragonica quinta æquiualet duas, scilicet pentagonam quintam & triangulam quartam pyramides, scilicet 75. & 20. Igitur hexagona æquiangula quinta æquiualebit tres, scilicet pentagonam quintam, triangulam quartam, & quadratam quartam, sicut fuit demonstrandum: & eodem syllogismo in omni casu constabit semper propositum.



Propositio 42ª.

Omnis columna quadrata, siue cubus, componitur ex duabus columnis triangulis, scilicet collaterali & præcedenti, & ex præcedenti triangulo. Exempli causa, dico, quòd cubus quintus scilicet 125. componitur ex duabus columnis triangulis, scilicet quinta 75. & quarta, scilicet 40. & ex triangulo quarto, scilicet 10. Nam, per diff. cubus talis conficitur ex quinque quadratis quintis : tales autem quadrati, per vndecimam huius, constant ex quinque triangulis quintis & ex totidem quartis. Verùm quinque trianguli quinti, per diff. faciunt columnam triangulam quintam : quinque autem trianguli quarti, faciunt columnam triangulam quartam & vnum triangulum quartum. Igitur cubus assumptus quinti loci æquiualebit aggregatum duarum pyramidum triangularum quintæ & quartę, & trianguli quarti : sicut demonstrandum fuit. Et simili argumento, quod pro quinto loco, pro quocunque alio procedam ad confirmandum propositum.

10—10. 15—25
10. 15—25
10. 15—25
10. 15—25
10. 15—25

10. 40. 75—125

PROPOSITIO 43.

10——25—35
10.25—35
10.25—35
10.25—35
10.25—35
10.40 125—175

Omnis columna pentagona construitur ex duabus columnis, scilicet quadrata collaterali, triangula præcedenti, & ex triangulo præcedenti. Exempli gratia, columna pentagona quinta 175. aio, quòd conficitur ex duabus columnis, scilicet quadrata quinta 125. & triangula quarta, scilicet 40. & ex triangulo quarto, scilicet 10. Nam per diff. columna pentagona quinta coaceruatur ex quinque pentagonis quintis. Talesque pentagoni, per diffin. ex quinque quadratis quintis, totidemque triangulis quartis. Cumque quinque quadrati quinti conficiant, per diffin. columnam quadratam, siue cubum quintum: atque, cùm quinque trianguli quarti æquiualeant columnam triangulam quartam, & triangulum quartum; iam planè sequitur, vt columna pentagona quinta æquiualeat cubum quintum, columnam triangulam quartam, & triangulum quartum. Neque aliud fuit demonstrandum. Sed argumentatio pro quinto loco facta, similiter ad aliud quemuis accommodabitur, sicut propositio concludit. Potes autem hìc, pro cubo, substituere ea, quibus per præcedentem æquiualet cubus. Sic enim columna pentagona æquiualebit triangulam columnam collateralem, duplum columnæ triangulæ quartæ, duplumque trianguli quarti.

175 { 125 { 75, 40, 10 }, 40, 10 }

PROPOSITIO 44.

10——35—45
10.35—45
10.35—45
10.35—45
10.35—45
10.35—45
10. 40 175—225

Omnis columna hexagona tetragonica constituitur ex collaterali columna pentagona, exq́; præcedenti columna triangula vnà cum præcedenti triangulo. Exempli gratia, columna hexagona tetragonica quinta, scilicet 225. conficitur ex quinta columna pentagona scilicet 175. & ex quarta columna triangula, scilicet 40. vnà cum quarto triangulo, scilicet 10. Nam, per diffin. columna hexagona tetragonica quinti loci, coalescit ex quinque hexagonis tetragonicis. Tales autem hexagoni constant per diffin. ex quinque pentagonis eiusdem loci, & ex totidem triangulis loci quarti. Porrò quinque pentagoni quinti conficiunt per diff. columnam pentagonam quintam. Et quinque trianguli quarti æquiualent columnæ triangulæ quartæ & triangulo. Igitur columna hexagona tetragonica quinta perficitur ex columna pentagona quinta, & ex columna triangula quarta. & ex triangulo quarto: quod erat ostendendum, vtque pro quinto factum sic pro cæteris locis prioribus, vel posterioribus argumentare, ad demonstrandum propositum. Et pro pentagona columna substituere potes ea,

quæ

quæ per præmiſſam pentagonæ æquiualent. Sic concludes, columnam hexagonam tetragonicam æquiualere aggregatum columnæ quadratæ collateralis, dupli columnæ triangulæ quartæ, dupliq́ue trianguli quarti.

225 { 17 { 125, 40, 10 }, 40, 10 }

PROPOSITIO 45.

Omnis columna hexagona æquiangula æquiualet aggregato ex columna hexagona tetragonica collaterali, & ex cubo, quadratoq́, præcedentibus. Exempli gratia, columna hexagona æquiangula quinti loci ſcilicet 305. æquiualet aggregato ex columna hexagona tetragonica quinta, ſcilicet 225. & ex cubo quarto, ſcilicet 64. quadratoq́ue quarto, ſcilicet 16. Nam, per diffi. columna hexagona æquiangula quinta conſtat ex quinque hexagonis æquiangulis. Tales autem hexagoni componuntur, per 32ª. huius, ſinguli ex coniunctione ſingulorum hexagonorum tetragonicorum eiuſdem quinti loci, & totidemq́ue quadratorum quarti loci. Sed quinque quadrati in quarto loco valent cubum quartum, & quadratum eiuſdem loci ſimul. Et quinque hexagoni tetragonici ex quinto loco faciunt, per diffin. columnam tetragonicam quintam. Igitur columna hexagona æquiangula quinta, valet aggregatum columnæ hexagonæ tetragonicæ quintæ, cubi quarti, & eiuſdem quadrati: quod oſtendendum fuit. Quæ demonſtratio, ſicut quinto loco, ita & alijs accommodatur, ad confirmandam propoſiti veritatem.

16——45—61
16.45—61
16.45—61
16.45—61
16.45—61
16. 64.225.305

COROLLARIVM.

Et pro columna hexagona tetragonica, ſubſtituere potes quicquid in præmiſſis, tali columnæ oſtenſum eſt æquiualere. Sic concludere poſſum, quòd columna hexagona æquiangula æquiualet columnam pentagonam collateralem, columnam triangulam cum ſuo triangulo, & cubum cum ſuo quadrato præcedentes. cæteras æquipollentias omitto, ne pluribus, quàm decet, negocium agam.

305 { 225 { 125, 40, 10 }, 64, 16 }

PROPOSITIO 46.

Omnis columna hexagona æquiangula coagmentatur ex radice collaterali tanquàm axe, & ex congerie præcedentis triangulæ columnæ, ſuiq́, trianguli ſexcuplicata. Nam, per diff. talis columna cõſtruitur ex hexagonis æquiangulis; hexagoni autẽ ex cẽtralibus vnitatibus, & ſexcuplo triãguli præcedẽtis. Exẽpli gr̃a, colũna hexagona æquiãgula quĩta 305. p diff. cõſtruitur ex quĩq; hexagonis æquiãgulis, hoc ẽ, quĩcuplo ipſi' 61. quĩti loci.

6 { 10.60.1-61, 10.60.1-61, 10.60.1-61, 10.60.1-61, 10.60.1-61 }
305.

Tales autem hexagoni quinque per diffi.coagmẽtãtur ex vnitatib. ſingulis.ſ. 5.qui eſt quinta radix:& ex triãguli quarti 10. ſexcuplo.ſinguli. Sed quinque talia ſexcupla triangulorum, faciunt, per diff. ſex columnas triangulas quartas, ſexque ſuos triangulos. Igitur columna hexagona æquiãgula quinta ſurgit ex coagmẽtatione 5ᵉ radicis, tanq̃ axis: & ex columnis quarti loci, ſex, cum totidem earũ triãgulis, ſicut fuit demonſtrãdum. Et aſſumpti loci argumentum accommodabitur ad quemuis locum aſſignatum: ſicut concludit propoſitio.

PROPOSITIO 47ᵃ.

Omnis columna triangula æqualis eſt aggregato duarum pyramidum, ſcilicet quadratæ collateralis, & triangulæ præcedentis. Exempli gratia, quinta colũna triangula ſcilicet 75. dico, quòd æquiualet aggregato pyramidis quadratę quintę, ſcilicet 55. & pyramidis triangulę 4ᵉ. ſ. 20. Intelligam enim quinque triangulos quinti loci, ſingulos ſic diſtinctos, vt formationis diffi. poſtulat. 1.2.3.4.5. qui iam per diffi. conſtituũt 5ᵃ columnam triangulam. ex horum ſecũdo excipio vnitatem: ex tertio 1.2. ex quarto 1.2.3. ex poſtremo 1.2.3.4. qui ſunt quatuor trianguli ab vnitate diſpoſiti, & per diffi. integrantes quartam pyramidem triangulam. ſic relinquitur vnitas, duo binarij, tres ternarij, quatuor quaternarij, & quinque quinarij, hoc eſt quicunque quadrati ſeriatim ab vnitate diſpoſiti, & per diffin. conſtruentes quintam pyramidem quadratam. Itaque totum aggregatum ex quinque totalibus triangulis, hoc ex 15. quinquies ſumpto, ipſa videlicet quinti loci triangula columna ęquiualet cumulo pyramidis quadratæ quintæ, ac pyramidis triangulæ quartæ: quod fuit oſtendendum. Similis eſt cuiuslibet alterius loci argumentatio ad veritatem propoſiti.

1 . 1 . 1 . 1 . 1
2 . 2 . 2 . 2 . 2
3 . 3 . 3 . 3 . 3
4 . 4 . 4 . 4 . 4
5 . 5 . 5 . 5 . 5

75 col.△ˡᵃ 5ᵃ { 55. pyr. □. 5ᵗᵃ ; 20. pyr. △. 4ˡᵃ

PROPOSITIO 48ᵃ.

Omnis columna triangula æqualis eſt aggregato trium pyramidum triangularum, ſcilicet vnius collateralis, & duarũ præcedentium. Exempli gratia, dico, quòd columna triãgula quinta. ſ. 75. æquiualet aggregato trium pyramidũ triangularum. ſ. quintæ, & duplo quartæ. Nam, per præcedentem, columna triangula quinta æquiualet pyramidem quadratã quintã & pyramidem triãgulam 4ᵃ. Sed per 34ᵃ huius, pyramidis quadrata 5ᵃ æquiualet pyramidem triangulã quintã, & pyramidem triangulã 4. Igr̃ columna △ˡᵃ 5ᵃ valebit pyramidẽ triangulã quintã, & duas pyrᵈᵉˢ △ˡᵃˢ 4ᵃˢ. quod fuit demõſtrãdũ. Qui ſyllogiſmus ſicut hic quinto loco, ita & vbiuis inſeruiet. ſicut propoſitio cõcludit.

□ˡᵃ. 5ᵃ { 35 △. 5ˡᵃ ; 20 △. 4ˡᵃ } = 55
75 col.△ 5ᵃ { 55 ; 20 △ˡᵃ 4ᵃ }

PRO-

PROPOSITIO 49^a.

Omnis columna triangula æqualis est pyramidi pentagoni collaterali Exempli gratia, columna triangula quinta est 75. quem numerum dico esse pyramidem pẽtagonam quintam. Nam per antepræmissam, columna triangula quinta valet pyramidem quadratam 5^a, & pyramidẽ Δ^{li} quartam. & per 36^a tales duę pyramides conficiunt pyramidem pentagonam 5^a. quamobrem pyramis pẽtagona quinta valebit columnam $\Delta^{lã}$ 5^a. quod fuit demonstrandum. Eodemque argumento vtar pro alio quouis loco, sicut propositio sentit.

pyr.Δ^{lis} 4^a.
col.Δ^{la} 75 { 20 / 55 } 75. pyr. ⬠ . 5^a
5^a
pyr.□^{ta} 5^a

PROPOSITIO 50^a.

Omnis columna triangula, cum duplo sui trianguli, æquiualet triplo pyramidis triagulæ collateralis. Exẽpli gratia, columna Δ^{la} quinta 75. vnà cum duplo sui trianguli. s. cum 30. dico ꝙ æquiualet triplum $\Delta^{læ}$ pyramidis quintæ. s. 35. Nam, per ante præmissam, columna Δ^{la} quinta valet tres pyramides triangulas. s. 5^a. & duas quartas. Apponantur vtrobique duo trianguli quinti, & fient columna 5^a, cum duobus triangulis 5^{is} simul accepta æqualis tribus pyramidibus triangulis. s. $5^{æ}$, duabus quartis, vnà cum duobus triangulis quintis: sed duæ pyramides $4^{æ}$ cum duobus Δ^{lis} quintis, faciunt per diff. duas pyramides 5as. Igitur columna triangula 5ª cum duobus triangulis 5^{is} valebit tres pyramides triangulas quintas. quod fuit demonstrandum. Quæ argumentatio ad omnem alium locum accõmodari potest, sicut propositio concludit.

75 { 35 / 20, 15 } 35 / 20, 15 } 35
15
15

cub^9 5^9 125 { col. triãgula 5^a. 75 / col. triãgula 4^a. 40 / triangulus 4^9. 10

PROPOSITIO 51^a.

Omnis cubus æqualis est pyramidi hexagonæ æquiangulæ collaterali. Exempli gratia, cubus quintus scilicet 125. qui & idem numerus est pyramis hexagona æquiangula quinta. Quod sic ostendam. Cubus 5^9, per 42ª æqualis est aggregato columnarum Δ^{lari} quintæ & $4^æ$, necnon & trianguli quarti. At per 41ª pyramis hexagona æquiangula quinta æqualis est aggregato pyramidis pentagonæ quintæ: pyr^{dis} □^{tæ} quartæ, & pyramidis triangulæ $4^æ$. Demonstrandum est igr̃ nobis, quòd hæc duo prædicta aggregata sunt inter se æqualia: sic enim per communem animi conceptum sequetur, vt cubus & pyr^{is} hexagona æquiangula 5^i loci, sint inuicem æquales. Auferatur ab illo quidem aggregato columna triangula 5^a: ab hoc vero aggregato pyr^{is} pentagona 5ª iampridẽ per ante præmissam æquales: Et demonstrandũ erit, quòd duo residua inde. s. aggregatum columnæ triangulæ quartæ & Δ^{li} quarti;

Pyr. hexag. æquiãgula 5. 125 { Pyr. ⬠^{na}. 5^a. 75 / Pyr.□^{ta} 4^a. 30 / Pyr.Δ^{la} 4^a. 20

Col. triãg quarta. 40 — pyr. ⬠^{na}. 4^a / 40
pyr.□^{ta} 4^a 30
pyr.Δ^{la} 3^a 10

Δ^r 4$^{\bullet}$
10——Δ^r 4$^{\bullet}$—10.

Tyr.□.4.——pyr.□.4.
30. 30.

Tyr. Δ^{la} 3^a
10 } pyr.Δ^{la} 4^a
Δ^{r} 4^{9}—— 20
10

hinc autem aggregatum pyramidis □^{tx} 4^{x}, & pyramidis triangulæ quartæ, ſunt inuicem æqualia: quòd ſic patet. Per antepræmiſſam rurſus, columna triangula quarta, æqualis eſt pyramidi pentagonæ quartæ: pyramis autem pentagona quarta, per 36^{i}, æqualis eſt pyramidi quadratæ quartæ, & pyr^{di} triangulæ tertiæ. Quamobrem, columna triangula 4^{a}, vnà cum Δ^{lo} quarto, æqualis erit cumulo trium, ſcilicet pyramidis □^{tæ} quartæ, pyramidis triangulæ tertiæ & trianguli 4^{i}. Oſtendendum eſt igitur, quòd dictus cumulus æqualis eſt aggregato pyramidis quadratæ 4^{æ} & pyramidis triangulæ 4^{æ}. Auferatur vtrinque, ſcilicet tam ab illo cumulo, quàm ab hoc aggregato pyramis quadrata 4^{a}. & demonſtrandum ſupererit, quòd pyramis triangula tertia vnà cum Δ^{lo} quarto æqualis eſt pyramidi triangulæ 4^{æ}: quòd tandem conſtat per diffin. ipſius pyr^{dis} triangulæ: quippe quæ aſſumpto ſemper ſequenti triangulo procreat ſequentem pyramidem. Qua argumentatione, ſicut in quinto, ita & in quolibet alio præcedenti vel ſequenti loco, ſemper conſtabit propoſitum.

COROLLARIVM.

1 } 8
7 } } 27
19 } } 64
37 } 125
61

QVONIAM igitur ſinguli cubi ab vnitate ordinati ſunt ſingulis pyramidibus hexagonis æquilateris ab vnitate diſpoſitis, collateralibus æquales; propterea manifeſtum eſt, quod cuborum differentiæ ſunt pyramidum prædictarum differentijs ſingulæ ſingulis æquales, hoc eſt, ipſis hexagonis æquiangulis. Ac, ſicut ex talium hexagonorum ad vnitatem ſucceſſiua coaceruatione pyramides prædictæ per ordinem conſtruuntur, ita & cubi procreantur. Suntque ipſi hexagoni cuborum gnomones ab vnitate continuati.

PROPOSITIO 52^{a}.

Omnis cubus cum ſequenti hexagono æquiangulo coniunctus conſtituit cubum ſequentem. Hæc propoſitio cõſtat ex præcedenti corollario. Sed & aliter hîc ipſam demonſtrabo. Diſponantur numeri ſic: vnitas 4. & 5. Item horum quadrati 16. & 25. & parte altera longior ex 4. in 5. factus ſcilicet 20. Item eorum cubi 64. & 125. deinde ex 4. in 20. fiat 80. & ex 5. in 20. fiat 100. Quibus diſpoſitis cùm 64. ſit cubus quaternarij, atq; 125. cubus quinarij, oſtẽdẽdum eſt, ꝙ 64. 4^{s} cubus cum 5° hexagono æquiangulo coniunctus conflat cubum 5^{m} 125. quòd ſic patet: Qm̃, per 9ª huius 4. eſt differentia ipſorum 16. & 20. per 10ª huius 5. eſt differẽtia ipſorum 20. & 25. atq; ipſe 4. multiplicans ipſos 16. & 20. facit ipſos 64. & 80.

1
4 . 5
16 . 20 . 25
64 . 80 . 100 . 125

Itemq;

Itemque ipſe 5. multiplicans ipſos 20. & 25. facit ipſos 100. & 125. propterea neceſſe eſt, vt differentia ipſorum 64. & 80. ſit ipſe 16. vtque differentia ipſorum 80. & 100. ſit ipſe 20. vtque differentia ipſorum 100. & 125. ſit ipſe 25. quoniam differentia productorum producitur ex multiplicāte in differentiam multiplicatorum. Igitur differentia ipſorum cuborum 64. & 125. conſtabit ex congerie trium numerorum 16. 20. & 25. qui quidem ſunt in hoc exēplo, quadratus quintus, parte altera longior quintus & quadratus 4[9]: qui cum, per 31[a] huius, faciant ſimul acceptæ hexagonum æquiangulum quintum: ſequitur, vt talis hexagonus ſit differentia dictorum cuborum: hoc eſt, vt cubus quartus 64. cum dicto hexagono quinto ſcilicet 61. coniunctus conſtituat cubum quintum 125. quod demonſtrandum in hoc exemplo aſſumpſimus: ſimiliter in omni alio caſu id idem demonſtraturi: ſicut proponitur.

COROLLARIVM.

Hinc ergo rurſus manifeſtum eſt, quòd ſicut hexagoni æquilateri ab vnitate continuati, pyramides hexagonas æquiangulas, ita & cubos ordinatim coaceruant.

PROPOSITIO 53[a].

Omnis parte altera longior, quadruplicatus cum vnitate, conficit quadratum collateralis imparis. Nam parte altera longior, per nonam huius, cōſtat ex præcedenti quadrato, ſuaq; radice. Igitur quadruplicatus facit quadruplū talis quadrati (quod quadruplum eſt numerus quadratus) & quadruplum prædictæ radicis, hoc eſt, duplum radicis huic quadrato debitę. Itaque parte altera longior quadruplicatus cum vnitate, efficit congeriem ex quadrato quodam, duploq; ſuæ radicis atque vnitate confectam. Sed, per 14[a] huius, talis congeries eſt quadratus ſequens: Igitur parte altera longior quadruplicatus cum vnitate facit quadratum: qui cùm impar ſit, propter vnitatis additionem, erit omnino & radix eius impar. Qui ſcilicet conſtat ex præcedenti radice duplicata cum vnitate, & per inde eſt impar ipſius parte altera longioris collateralis. Exempli gratia: numerus 30. parte altera longior ſexti loci quadruplicatus cum vnitate facit 121. quadratum vndenarij ſexti imparis. Nam 30. per nonam conſtat ex præcedenti quadrato 25. ſcilicet quinto, & ex quinta radice 5. quadruplum autem ipſius 25. eſt 100. quadratus paris in ſexto loco. Quadruplum verò, eius radicis ſcilicet 5. eſt duplum

4	25	—	100
	5	—	20
			1
11	11	—	121

X 4 plum

plũ radicis ipsius 100. Igr̃ quadruplum totius 30. est aggregatum ipsius 100. duploq; suæ radicis: qđ cũ vnitate, facit per 14ª, □tu sequentẽ. s. 11. radicis, qui est impar sexti loci. Quod est demonstrãdum. Similiter, ꝙ pro sexto loco syllogizamus, vbi vis accommodabis. sicut proponitur. PROPOS. 54ª.

4—30—120
1
8—15—120
1
———
121

Omnis triangulus octuplicatus cum vnitate, conficit sequentis imparis quadratum. Exempli gratia, 15. 5⁹ △lr octuplicatus facit 120. qui cum vnitate facit 121. □tũ sexti imparis. s. 11. Nam per 8ª huius, 5⁹ triangulus duplicatus facit 30. sextum parte altera longiorem. Sed, per præcedentem, 6⁹ parte altera longior quadruplicatus cum vnitate, conficit □tu 6i imparis 11. Igitur & triangulus 5⁹ 15. octuplicatus cum vnitate faciet eundem □tũ sexti imparis 11. quod erat demonstrandum. Quæ demonstratio & alijs locis inseruiet. sicut proponitur.

PROPOSITIO 55ª.

Quod fit ex radice in parte altera longiore collaterali cum quadrato collaterali coniunctum, conflat cubum collateralem. Exempli gr̃a: quinta radix 5. ducta in 5ª parte altera longiorem. s. 20. facit 100. hoc autẽ iũctum cum quinto □to 25. facit 125. quintum cubum. Nam per diffin. 5. in se ductus, facit suum quadratum 25. quinti loci: & idem 5. cũ quinto parte altera longiori 20. per decimam huius, facit 25. quadratum 5ũ. Sed per primam secũdi Elementoꝝ ad nũos relatam, qđ fit ex 5. in se, qđq; ex quinq; in 20. est ęquale simul ei, quod fit ex 5. in aggregatum ex 5. & 20. qui quadratus est ipsius 5. Igitur □ ipsius quinq; cum producto ex 5. in 20. parte altera longiori quinto, simul sunt æqualia ei, quod fit ex 5. in suum □tũ 25. hoc est cubo ipsius quinarij: qđ fuit demonstrandum. vtq; in loco quinto, similiter & alibi constabit propositum.

5 { 20——100
5 { 5——25
cubus quintus 125

PROPOSITIO 56ª.

Quod fit ex radice in triangulum præcedentem duplicatum, & cum quadrato radicis coniunctum, conflat cubum radicis. Exempli gratia, quod fit ex 5. radice quinta in 10. triangulũ 4ũ. s. 50. duplicatum est 100. hoc cum 25. quadrato radicis, conflat 125. cubum radicis. Nam, per 8ª huius 10. triangulus 4⁹ duplicatus facit 20. parte altera lõgiorem 5ũ: quare productũ ex 5. in 10. s. 50. est dimidium producti ex 5. in 20. & ideo 50. duplicatum facit productum ex 5. in 20. Sed per præcedentem, productum ex 5. in 20. cum □to ipsius 5. facit cubum ipsius 5. Igitur & 50. duplicatum, hoc est, 100. cum □to ipsi⁹ 5. facit cubũ eũdẽ 5ⁱ radicis. s. 125. quod est ꝓpositũ.

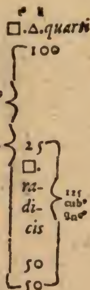
5 { 10 { 50
5 { 10 { 50
5 — 25
125

PRO-

PROPOSITIO 57ª.

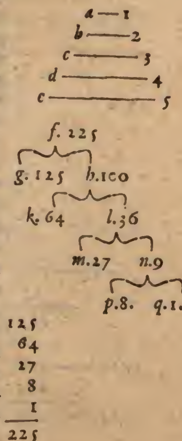
Omnis cubus cum trianguli præcedentis quadrato cöiunctus, efficit quadratum trianguli collateralis. Exempli gratia,cubus quintus 125.cum quadrato trianguli quarti 10.hoc est cum 100.coniunctus,efficit 225.quadrati scilicet trianguli quinti 15.Quod sic ostenditur.Radix quinta 5.cũ triangulo quarto 10.per diffinitionem,conficit triangulum quintũ 15. quare, per quartam secundi Elementorum ad numeros redactam, duo quadrata scilicet dictæ radicis,& dicti triãguli quæ sunt 25.& 100.vnà cum duplo eius, quod ex radice fit in triangulum,hoc est duplo ipsius 50.conficiunt quadratum trianguli quinti,scilicet 225.Sed,per præcedentem, tale duplum vnà cum quadrato talis radicis, hoc est 100. cum 25. facit cubum ipsius radicis. Igitur cubus ipse quintus cũ quadrato trianguli quarti,hoc est 125. cum 100. simul efficient quadratum trianguli quinti,scilicet 225.Quod fuit ostendendũ. Quæ argumentatio à quinto ad alios locos transferetur, ad probandum propositum.

radix. 5ª
5
10
Δ 4
15 Δ 5
eius.□
est 225.



PROPOSITIO 58ª.

Omnis trianguli quadratus,æqualis est aggregato cuborum ab vnitate vsque ad cubum triangulo collateralem inclusiuè sumptorum. Sit,exempli gratia,triangulus numerus quintus, qui,per diffinitionem ex vnitate a.& sequentibus per ordinẽ radicibus b c d e.simul iũctis coaceruatur: cuius quadratus sit f. Aio,quòd f. æqualis est aggregato cuborum ab ipsis a b c d e.radicibus singulis factorum.Quod sic demõstratur. Sit g.cubus ipsius radicis e.sitque h.quadratus totius a b c d. hoc est trianguli quarti. Eritque, per præcedentem, ipse f. æqualis ipsis g h. simul sumptis. Rursum,sit k.cubus ipsius d.sitque l.quadratus totius a b c.hoc est triãguli tertij: eritq; per præmissam, h.æqualis ipsis k l. simul. Item,sit m.cubus ipsius b.sitq; n.quadratus totius a b.hoc est trianguli secũdi. eritque similiter l.æqualis ipsis m n.pariter sumptis.Demum sit p.cubus ipsius b.sitque q. hoc est vnitas, quadratus ipsius a.vnitatis: eritque non secus n.æqualis ipsis p q. coniunctis. Quamobrem, ipse f. æqualis erit ipsis g k m p q. pariter acceptis:qui scilicet sunt ipsorum a bcd e.radicum singularum cubi. quod fuit demonstrandum. Idemque de quodlibet in infinitum cubis ostendetur. Quorum scilicet radices per ordinem ab vnitate coaceruant quemuis propositum triangulum,sicut propositio concludit.



PROPOSITIO 59^{a}.

3 } 12 } 4 } 20 } 5 — dra. 8

Omnis parte altera longior excedit præcedentem parte altera longiorem in duplo præcedentis radicis, & ideo in ipso pari numero collaterali. Exempli gratia, quintus parte altera longior 20. excedit quartum parte altera longiorem scilicet 12. in duplo quartæ radicis, scilicet 8. Quod liquido constat. Nam 20. fit ex 4. in 5. at 12. ex 4. in 3. quæ producta differunt in duplo multiplicantis: quoniã multiplicati differunt binario. Et ideo 20. maior est, quàm 12. in ipso pari numero quinto, scilicet 8. quippe qui per tertiam huius, est duplum prædictũ 4ª radicis. Sic & pro alijs locis constat propositum.

8 *par.*

PROPOSITIO 60^{a}.

24. *differentia.*

25 { 24, 1 } 49 { 48, 1 }

Omnis quadratus imparis excedit præcedentis imparis quadratum in quadruplo collateralis paris. Exempli gratia: quadrati quarti imparis, s. 49. excedit quadratum tertij imparis, scilicet 25. in quadruplo quarti paris 6. hoc est in 24. Nam per 53^{a} præcedentem 49. constat ex parte altera longiori quarto quadruplicato, & vnitate. Et per eandem 25. constat ex parte altera longiori tertio quadruplicato & vnitate. Igitur 49. excedit ipsum 25. in quadruplo differentiæ, qua parte altera longior quartus excedit parte altera longiorem tertium: Sed per præmissam talis differentia est per numerus quartus, scilicet 6. ergo 49. excedit ipsum 25. in quadruplo quarti paris, 6. hoc est, in 24. Quod erat demonstrandum. Quare sicut pro quarto, ita pro alio quocunque loco propositum concludemus.

PROPOSITIO 61^{a}.

Quod fit ex qualibet radice in parte altera longiorem collateralem si coniungatur cum quadrato collaterali; conflabitur gnomo, qui coniunctus cum quadrato trianguli præcedentis, conficit quadratum trianguli collateralis. Exempli gratia: Ex radice 5. in quintum parte altera longiorem scilicet 20. fit 100. qui iunctus quadrato quinto scilicet 25. conflat 125. Aio, quòd 125. positus cũ □^{to} Δ^{li} 4^{i} 10. s. cum 100. cõficiet □^{tũ} Δ^{li} 5^{i} 15. s. 225. Nam, per 55ª præcedentem, quod fit ex radice 5^{a} in 5^{e} parte altera lõgiorem, si iũgatur cũ □^{to} 5°, cõstituit 5^{ũ} cubũ, Sed, p 55ª præcedẽtem, 5° cubus cũ □^{to} Δ^{li} 4^{i} cõiunctus cõficit □^{tũ} Δ^{li} 5^{i}: Igr̃, qđ fit ex radice 5^{a} in 5^{ũ} parte altera lõgiorẽ, iũctum cum □^{to} 5°: hoc est, ipse nũus 125. si apponatur □^{to} Δ^{li} 4^{i} .s. 100. conficiet □^{tũ} Δ^{li} 5^{i}. s. 225. quod fuit ostendẽdum, in 5° loco & similiter in alijs locis constabit propositum.

5 — 20 — 100
25
———
125

10 ——— 100
125
———
15 ——— 225

PRO-

PROPOSITIO 62ª.

Vnitas primum cubum : duo sequentes impares iuncti sequentem cubum: tres sequentes tertium cubum. Quatuor succedentes quartum. Quinque post eos quintum. Sex sextum. Septem septimum. Semperq; vno plures sequentem deinceps in infinitum cubum aggregati conflabunt. Disponantur ab vnitate a. per ordinem impares in indefinitum b c d e f g h k l m n o p q. Aio, quòd b c. simul secundum ab vnitate, cubum faciunt. quodque d e f. simul tertium cubum: quodque g h k l. simul sumpti quartum cubum: quodq; ipsi m n o p q. simul quintum cubum iuncti conficiunt: Itaque deinceps. Sit enim ipsorum b c. aggregatum r. & ipsorum d e f. cumulus s. & ipsorum g h k l. congeries t. & ipsorum m n o p q. aceruus u. eritque demonstrandum, quòd a. erit primus cubus, scilicet vnitas. & r. secundus cubus. & s. tertius. & t. quartus. & v. quintus. hoc modo. Quoniã ipsi a b c d e f g h k l m n o p q. sunt impares numeri ab vnitate per ordinem dispositi: propterea, per 15ª huius, ipsorum a r s t v. aggregatum erit quadratus ab vnitate in ordine quindecimus: quoniam postremus impar, scilicet q. quindecimus est in ordine impariũ ab vnitate. Itaque tale aggregatum erit quadratus, qui fit à quinto triangulo, hoc est à numero quindenario. Talis ergo quadratus, ex præmissa 58. erit æqualis quinque cuborum ab vnitate dispositorum cumulo. Et ideo totus a r s t u. numerus erit quinque talium cuborum congeries. Et per eadem ac similiter ostendemus, quòd ipsorum a r s t. aggregatum erit quadratus ab vnitate decimus: (quandoquidem l. decimus est impar:) hoc est quadratus quarti trianguli: qui est numerus denarius: qui quadratus per 58ª præcedentem erit congeries quatuor cuborum ab vnitate ordinatorum. Quamobrem, cum ipsorum a r s t v. cumulus sit quinque cuborum ab vnitate continuatorum congeries: atque ipsorum a r s t. cumulus sit quatuor ab vnitate cuborum aggregatio: necesse est vt v. sit 5º cubus ab vnitate. Et similiter post quàm per eadem ostenderimus, pa r s. sit cumulus trium cuborum ab vnitate: relinquetur t. quartus ab vnitate cubus. Demum ostenso, quòd a r. sit duorum cuborum cumulus, superérit esse tertius ab vnitate cubus. Cumq; a. sit vnitas; erit & r. alter ab vnitate cubus: quod erat demonstrandum. Et similiter deinceps, pro sexto, septimo, cæterisq; in infinitum cubis procedi potest, sicut propositio conclusit.

a —— 1		
b —— 3	r. 8	
c —— 5		
d —— 7	s. 27	
e —— 9		
f —— 11		
g —— 13	t. 64	
h —— 15		
k —— 17		
l —— 19		
m —— 21	v. 125	
n —— 23		
o —— 25		
p —— 27		
q —— 29		

PROPO-

PROPOSITIO 63ª.

cubº 5º 125 { 75.col.$\triangle$ˡᵃ 5ª. + | 40.col.$\triangle$ˡᵃ 4ª — | 10. $\triangle$.4º. —

□º.5º 25 { 10. $\triangle$º. 4º — | 15. $\triangle$º. 5º. +

$\triangle$.5º 15 —— $\triangle$. 5º.+

pyr.□.5ª 55 { 35.pyr.$\triangle$ˡᵃ 5ª .+ | 20.pyr.$\triangle$ˡᵃ 4ª —

Omnis cubus cum quadrato & triangulo collateralibus coniunctus, triplum efficit ſuæ quadratæ pyramidis. Exempli gratia: quintus cubus eſt 125. quintus quadratus 25. quintus triangulus 15. Aio, quòd horum aggregatum triplum eſt ad pyramidem quadratam quintam, ſcilicet 55. quòd ſic patet. Cubus quintus per 42ª huius, æquiualet columnas duas triangulas. ſ. quintam, & quartam & triangulum quartum. Item per vndecimam huius, quadratus quintus æquiualet duos triangulos, ſcilicet quintum & quartum. Quamobrem aggregatum prædictum æquiualebit duas columnas triangulas, ſcilicèt quintam & quartam, & quatuor ſimul triangulos ſcilicèt duos quintos & duos quartos. Igitur demonſtrandum erit, quòd congeries talium duarum columnarum & talium quatuor triangulorum, eſt tripla ad pyramidem quadratam quintam. Sed cum per 34ª huius, pyramis quadrata quinta conſtet ex combinatione duarum pyramidum triangularum quintæ & quartæ: iam oſtendẽdum erit, quòd congeries prædicta duarum columnarum & quatuor triangulorum, eſt tripla ad combinationem dictam duarum pyramidum. Et conſtat ſic. Quod per 50ª huius columna triangula quinta cum duobus triangulis quintis ſimul conficiunt triplum pyramidis triangulæ quintæ: & per eandem 50ª columna triangula quarta cum duobus triangulis quartis ſimul accepta, triplum facit pyramidis triangulæ quartæ. Ergo, per primam quinti Elementorum Euclidis, tota congeries duarum columnarum & quatuor triangulorum, tripla erit ad totam combinationem duarum pyramidum: quandoquidem partes ſingulæ partibus ſingulis triplæ ſunt. & hoc erat demonſtrandum. Et ſimiliter pro cubis cæterorum locorum conſtabit propoſitum.

PROPOSITIO 64ª.

per 43ª

175 col. ⬠ .5ª { 125.cubº.5º.+ | 40.co.$\triangle$ˡᵃ4ª * | 10.$\triangle$ˡº.4º—*

per 11ª

25 □.5º. { 15. $\triangle$º. 5º. + | 10. $\triangle$. 4º. *

Omnis columna pentagona cum duplo quadrati collateralis ſimul ſumpta, triplum valet ſuæ pyramidis pentagonæ. Exempli gratia, columna pentagona quinta 175 cum duplo quadrati quinti 25. hoc eſt cum 50. fecit 225. quod triplum eſt ipſius pyramidis pentagonæ quintę 75. quod oſtenditur ſic. Colũna pentagona quinta æqualis eſt cubo quinto per 43ª columnę triangulæ quartæ & triangulo quarto ſimul acceptis: quibus appono vnum quadratum quintum: & pro altera quadrato quinto, appono duos triangulos quintum & quartũm, qui

per

*

Hic pauca desunt.

□.5 —— 4
25

11. simul s emon-
strandum erit quod na
triangula quarta, triangulo quinto, duobus triangulis
quartis, simul triplum est pyramidis pentagonæ quintæ. Sed
pyramis pentagona quinta, per 36, constat ex combinatione duarum pyramidum, scilicet quadratæ quintę & triangulę quartę. Ergo est demonstrandum, quòd dictum aggregatum est triplum huic combinationi. quod sic patet, Vna pars illius aggregati, scilicet cubus quintus, cum quadrato quinto & triangulo quinto simul per pręcedentem, ęqualis est triplo quintę quadratę pyramidis,

Pyr. □. 5
75 Pyr. ⬠. 5. 55 — +
Pyr. △. 4
20 — *

Hęc lacunas implevit Camillus Gloriosus Exercitat. sexta

*

Hic multa desunt, quæ non sunt in exemplari manuscripto.

per 37 Py. ⬠. 5
per 37. 95.
scilicet penta- py. hex. 5
gonę quintę . Quare ostenden- Pyr. △. 4.
dum est, quòd supra dictum aggregatum est triplum huius (20. *
combinationis: quod constabit sic. Vna pars illius aggregati,
scilicet

ſcilicet columna pentagona quinta cum duobus quadratis quintis, per præcedentem, æquiualet triplum pyramidis pentagonæ quintæ, quæ fuit vna pars combinationis: & ſimiliter reliqua pars aggregati, ſcilicet columna triangula quarta cum duobus triangulis quartis ſimul, per 50. huius, triplum valet pyramidis triangulæ quartæ, quod eſt reſiduum combinationis. Quamobrem, quoniam duæ partes aggregati, duabus partibus combinationis, ſingulæ ſingulis triplæ ſunt: propterea, per primam quinti Elementorum, & totum aggregatum totius combinationis triplum valebit: quod fuit demonſtrandum. & eodem ſyllogiſmo pro quo uis alio aſſignato loco vtemur ad roborationem propoſiti.

COROLLARIVM.

25. quadratus quintus

25. □. 5. { 15. Δ. 5 / 10. Δ. 4 }

10. Δ. 4

hexag. 5. 45. { 25. □. 5. / 10. Δ. 4. / 10. Δ. 4. }

Et pro duplo quadrati collateralis ac præcedenti triangulo, ſubſtituere potes hexagonum & triangulum collaterales: quoniam ſunt tantundem. Nam, per vndecimam huius, quadratus quintus valet duos triangulos, quintum & quartum. Quare duo quadrati quinti cum triangulo quarto, ſimul valent cumulum quadrati quinti, trianguli quinti, & duorum triangulorum quarti loci. Sed, per 19. quadratus quintus, & duo trianguli quarti conficiunt hexagonum quintum: ergo hexagonus quintus, cum triangulo quinto valebunt duos quadratos quintos, & triangulum quartum: & ideo pro illis ſubſtitui poſſunt in præmiſſa propoſitione.

PROPOSITIO 66.

per 45.

Col. hex. æqui. 305 { col. hexag. tetr. 5. + 225. / cub' 4 64 + / □. 4. 16 }

hexagonus 5. 45 + triang. 5. 15. + triang. 4. 10.

Omnis columna hexagona æquiangula cum hexagono tetragonico collaterali, cumq́; duobus triangulis, collaterali ſcilicet & præcedenti, pariter ſumpta, triplũ facit ſuæ pyramidis hexagonæ. Exempli gratia, dico, quòd columna hexagona æquiangula quinta, ſcilicet 305. vnà cum hexagono tetragonico quinto 45. cumque triangulo quinto 15. & triangulo quarto 10. coniuncta, facit triplum ſuæ pyramidis quintæ, ſcilicet 125. ad quod oſtendendum ſic procedo. Columna hexagona æquiangula quinta, per 45. huius libri, æqualis eſt columnæ tetragonicæ quintæ, cubo quarto, & quadrato quarto pariter acceptis. His ego appono hexagonum tetragonicum quintum, triangulum quintum, & triangulum quartum; atque ita demonſtrandum erit, quod totum huiuſmodi aggregatum ex columna hexagona tetragonica quinta, cubo quarto, quadrato quarto, hexagono quinto, triangulo quinto, & triangulo quarto ſimul, triplum eſt pyramidis hexagonæ æquiangulæ quintæ.

quintæ. Cumque talis pyramis conſtet, per 40. ex combinatione duarum pyramidum, ſcilicet hexagonæ tetragonicæ quintæ, & quadratæ quartæ; iam oſtendendum erit, quòd ſuperius dictum aggregatum, triplum eſt ipſius dictæ combinationis: quod haud obſcurè conſtat. Nam vna pars illius aggregati, ſcilicet columna hexagona tetragonica quinta, cum hexagono ſuo quinto, & triangulo quinto, per præcedentis corollarium, æquiualet triplũ pyramidis tetragonicæ quintę: quæ vna partium combinationis eſt. Nec ſecus, reliqua pars aggregati, ſcilicet cubus quartus cum quadrato quarto, & triangulo quarto, ſimul ſumptus, per 63. huius, valet ſimiliter triplum pyramidis quadratæ quartæ, quæ iam de combinatione reſidua pars eſt. Itaque quoniam duę partes aggregati duabus combinationis partibus ſingulę ſingulis ſunt triplę: iccirco, per primam quinti Elementorum, & totum aggregatum totius combinationis triplum erit: quod erat demonſtrandum. Et argumentatio à quinto loco ad alia quęuis loca transferetur ad concluſionem propoſiti.

pyr.hexa tetr. 5. 95.
per 40ª.
pyr.hexa.ęq. 5 125
pyr. □. 4ª 30.*

COROLLARIVM.

Et pro duobus triangulis collaterali & pręcedenti, ſubſtituere potes quadratum collateralem. Nam, per vndecimam, quadratus ęqualis eſt duobus ſimul triangulis, collaterali, & pręcedenti.

COROLLARIVM.

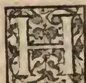
Rurſum pro hexagono tetragonico, & quadrato collateralibus, ſubſtituere potes hexagonum æquiangulum & numerum imparem collaterales. Nam, per 32. exempli gratia, hexagonus æquiangulus quintus, valet hexagonum tetragonicum quintum cum quadrato quarto. Apponatur vtrobique numerus impar quintus, at tunc hexagonus æquiangulus quintus cum impari quinto valebit hexagonum tetragonicum quintum cum quadrato quarto & impari quinto. Sed, per 13. quadratus 4ª & impar quintus ſimul valent quadratum quintum. Igitur hexagonus æquiangulus quintus cum impari quinto valent hexagonum tetragonicum quintum & quadratum quintum ſimul ſumptos: & perinde iiſdem ſubrogari poſſunt.

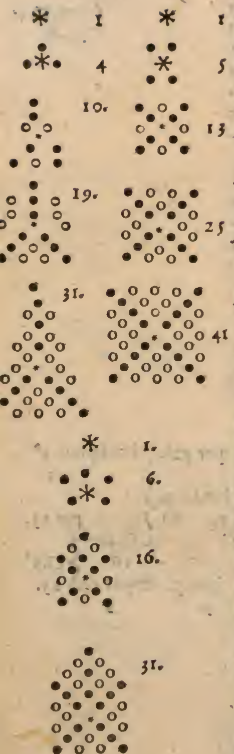
per 32ª. hexag.tetr. 5ª 45
hexa.æq. 5. 61
per 13.
□.4 16
□.5ª 25.
ĩpar 5. 9.
impar 5. 9

LIBRI

LIBRI PRIMI
Pars Secunda.

PROLEGOMENA.





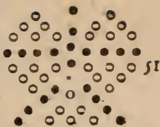
Actenus de numerarijs formis primi generis, nunc de centralibus agendum: de quarum numero est forma hexagona æquiangula tã superficialis, quàm solida, seu pyramis, seu columna: de qua tamen in primo genere disseruimus, propter talis formæ dignitatem, quæ meretur vtrobique tractari. Itaq; quo ad hexagonam æquiangulam formam, hìc non repetemus ea, quæ in premissis demonstrata sunt: sed præmissis diffinitionibus, cætera prosequemur.

DIFFINITIONES.

Omnis forma numeraria cẽtralis plana superficialis cõstruitur ex centrali vnitate & ex tot triãgulis præcedẽtibus primi generis, quot sunt formæ ipsius anguli: vtpote triangulus centralis ex vnitate & tribus triangulis. Quadratus centralis ex vnitate & quatuor triangulis. Pentagonus centralis ex vnitate & quinque triãgulis. Hexagonus ex vnitate & sex vt antea diximus. Heptagonus ex vnitate & septẽ. Octogonus ex vnitate & octo triangulis primi generis, latera semper æqualia & angulos vniformes constituentibus compaginatur. Itaq;, si lubet, deinceps. Vnde omnis figura centralis superaddit præcedenti figuræ triãgulum. Verũ, sicut in Hexagono geometrico latera sunt semidiametris æqualia; ita hìc, in hexagono numerali vnitates angulares tantùm inter se distant, quantũ ipsæ ab vnitate centrali remouentur: & tres unitates proximę semper triãgulũ æquilaterũ faciunt: sicut in quadrato primo quatuor unitates quadratum conformant. In cæteris autem formis centralibus, hoc est in triangulo, quadrato & pentagono, unitates laterales magis distant, quàm diametrales: minus uerò in formis hexagonum sequentibus, ut in heptagono & octogono, ut postulat situs Geometricarum formarum, quas Arithmeticæ imitãtur.

Omnis

Omnis porrò pyramis centralis fit ex aggregatione centralium formarum sui, nominis ab vnitate vsq; ad basim suam successiuè aggregatarum. Vtpote pyramis triangula, triangularum: quadrata, quadratarum, & deinceps. Omnis demum columna centralis procreabitur ex forma centrali collaterali (quæ sua basis est) toties 4. coaceruata, quota est in ordine, siue in radicem lateralem multiplicata. Harum proprietates & colligantias nunc explicabimus.



PROPOSITIO 67ª.

Omnis triangulus centralis constat ex collaterali triangulo & præcedenti quadrato primi generis. Exempli gratia: triangulus quintus centralis scilicet 31. constat ex triangulo collaterali primi generis, scilicet 15. & ex quadrato quarto, scilicet 16. Quod sic ostenditur. Tres trianguli primo ex ordine, tertius. quartus, quintus, scilicet, 6. 10. & 15. simul coniuncti, conficiunt triplum medij, & vnitatem per 29ª huius. Sed per diffin. triplum medij, hoc est, quarti trianguli, cum vnitate, conficit quintum triangulũ centralem. Igitur quintus triangulus centralis constat ex aggregato trium dictorum triangulorum tertij, quarti, & quinti. Cumque per 11ª huius, tertius & quartus triangulus componãt quartum quadratum: sequitur, vt quartus quadratus cum quinto triangulo simul sumptus perficiat quintum triangulum centralem. Quod erat demonstrandum: & à quinto loco transfertur syllogismus ad quem vis alium: vt propositio conclusit.

6, 10 } 16; 16, 15 } 31

PROPOSITIO 68ª.

Omnis quadratus centralis conficitur ex duobus quadratis primi generis, scilicet collaterali & præcedenti. Exempli gratia. Quadratus qnt⁹ cẽtralis 41. cõficit' ex quinto & quarto quadratis primi generis. s. 25. & 16. Qd sic patet. Per 11ª huius, quadrat⁹ qnt⁹ constat ex quarto & qnto triãgulis primi generis Et p præcedẽtẽ, triãgulus qntus cũ quadrato 4. primi generis, cõficiũt triãgulũ qntũ cẽtralẽ: Igitur quadrat⁹ qntus cũ quadrato quarto simul æquiualẽt triãgulos duos. s. quartum primi generis, & qntũ cẽtralẽ. Sed triãgulus qntus centralis cum triangulo quarto primi generis, per diffin. procreat quadratum quintum centralem: ergo quadratus quintus centralis æquiualet duos quadratos primi generis, scilicet quintum & quartum: quod fuit demonstrandum. & argumentum à quinto ad quemuis propositum locum transfertur, vt conclusio proponit. Id idem demonstratur per 30ªm huius.

41 { 25 { 10, 15; 15, 16 } 31

41 { 31, 10

PROPOSITIO 69ª.

Omnis pentagonus centralis construitur ex pentagono primi generis collaterali, & ex praecedenti quadrato. Exempli gratia, pentagonus quintus centralis 51. construitur ex duobus formis primi generis, scilicet pentagono quinto 35. & quadrato quarto 15. Quod sic constat. Per diffinition. pentagonus quintus primi generis construitur ex quadrato quinto & triangulo quarto. Et per praecedentem, quadratus quintus cum quadrato quarto faciunt quadratum centralẽ quintũ. Quare, pentagonus quintus cum quadrato 4° primi generis valebũt quadratum 5ᵘ centralem cũ triangulo quarto primi generis. Verùm per diffinitionem, □ʳ quintus centralis cum triãgulo 4° procreat pẽtagonum quintum centralem. Ergo pẽtagonus 5° centralis aequalebit pẽtagonũ quintũ & □ᵘ 4ᵘ primi generis: qđ fuit demonstrãdũ. Quae demõstratio, sicut 5° ita cuilibet ꝓposito loco accõmodabitur ad cõfirmãdũ propositũ.

51 { 35 { 10, 25 }; 16 } — 25 + 16 = 41

51 { 41, 10 }

PROPOSITIO 70ª.

Omnis hexagonus cẽtralis conflatur ex formis primi generis, scilicet hexagono collaterali & quadrato praecedenti. Haec propositio eadem est cum 32ª. Sed hic in ordine centraliũ aliter demonstrabitur. Dico igitur, ꝙ hexagonus centralis quintus scilicet 61. cõflatur ex quinto hexagono primi generis. s. 45. & □ᵗᵒ quarto 16. Quod quãuis in 32ª huius fuerit demonstrandum, tñ & hìc aliter cõstabit sic. Per diffinitionem, hexagonus 5° primi generis constat ex △ˡᵒ 4° & pentagono quinto primi: & per praecedentem, pẽtagonus 5° talis cum quadrato 4° primi, componunt pentagonum centralem 5ᵘ. Quare, Hexagonus 5° primi cum □ᵗᵒ 4° aequiualebunt triangulum 4ᵘ cum pentagono centrali quinto. Verùm, per diffin. pẽtagonus centralis 5° cum △ˡᵒ 4° constituit hexagonum centralem 5ᵘ. Ergo hexagonus centralis 5° aequiualebit hexagonum 5ᵘ cum □ᵗᵒ 4° pⁱ generis: quod erat demonstrandum. Et similiter pro alijs locis argumẽtatio procedat ad ꝯcludẽdũ propositũ.

61 { 45 { 10, 35 }; 16 } — 35 + 16 = 51

61 { 51, 10 }

PROPOSITIO 71ª.

Omnis heptagonus conflatur ex tribus formis primi generis, scilicet hexagono tetragonico collaterali, atque quadrato & triangulo, praecedentibus. Exempli gratia, heptagonus 5° 71. conflatur ex primi generis hexagono quinto 45. quadrato quarto 16. & triangulo 4°. 10. Nam, ex diffinitione, ipse 5° heptagonus constat ex 5° hexagono centrali & ex 4° triangulo: Sed per praecedentem, ipse hexagonus aequiualet quintum hexa-

71 { 61 { 45, 16 }; 10 }

hexagonum primi generis, & quadratum quartum. Igitur hexagonus quintus primi generis cum quadrato & triãgulo quartis simul conflabunt heptagonum quintum: quod est propositum. Similiter in alijs locis confirmatur propositum.

PROPOSITIO 72^{a}.

Omnis octogonus est ęqualis quadrato imparis numeri sibi collateralis. Exẽpli gratia, 5^{9} octogonus est 81. q quidem □^{t9} est imparis 5^{i}, hoc est nouenarij. Nam, per diffinitionẽ, 5^{9} octogonus ꝯstruitur ex 4° △^{lo} primi generis octuplicato, & ex vnitate. Sed, per 54^{a} huius, tale octuplũ cũ vnitate est quadratus imparis 5$_{i}$. Igitur talis □^{t9} est ipse octogonus 5^{9}. quod est propositum. Non aliter pro cæteris in infinitum locis constat propositum.

PROPOSITIO 73^{a}.

Omnis forma centralis plana constat ex vnitate & ex radice præcedenti in numerum laterum ducta, & ex △^{lo} radicem præcedente in eundem numerũ ducto. Exẽpli grã, hexagonus cẽtralis 5^{9} 61. cõstat ex vnitate, ex sexcuplo radicis 4^{e}. s. 4. ꝙ est 24. & ex sexcuplo △^{li} tertij 6. hoc est 36. ꝙ liquido cõstat per diffin. ipsius hexagoni: sicut in 26ª fuit ostẽsum. Nam dicta duo sexcupla faciunt sex △^{los} 4os qui cum vnitate compaginãt ipsum hexagonũ. Similr in △^{lo} cẽtrali, ꝑ sexcuplis accipe tripla: in □^{o} cẽtrali, quadrupla; in pẽtagono, quincupla: in heptagono, septupla: in octogono octupla ipsarũ radicũ præcedẽtium & △^{lorũ} añ præcedẽtiũ vt in oĩ proposito loco ꝯcludas ꝓpositũ. Vñ, ꝙ 26^{a} de hexagono, præsens de oĩ plano cẽtrali cõcludit.

61 { 1, 24, 36 } 60

PLANI PRIMI GENERIS.						PLANI CENTRALES.					
1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6		4	5	6	7	8	9
3	6	9	12	15		10	13	16	19	22	25
4	10	16	22	28		19	25	31	37	43	49
5	15	25	35	45		31	41	51	61	71	81
6	21	36	51	66		46	61	76	91	106	121
7	28	49	70	91		64	85	106	127	148	169
8	36	64	92	120		85	113	141	169	197	225
9	45	81	117	153		109	145	181	217	253	289
10	55	100	145	190		136	181	226	271	316	361
radices	△^{li}	□^{ti}	⬠^{ni}	✱^{ni}		△^{li}	□^{ti}	⬠^{ni}	✱^{ni}	*Hept*	*Oct.*

PROPOSITIO 74ª.

Omnis pyramis cētralis constat ex radice collaterali tanquam axe, & ex tot pyramidibus triangulis primi generis praecedentibus loci, quot sunt latera pyramidis centralis. Quod 39ª .huius de pyramide centrali hexagona demonstrauit: hæc pręsens de omni pyramide centrali concludit. Et demonstratio vtrobique est eadem. Itaque in omni pyramide sumenda est radix
85 {5, 80} collateralis: sed in pyramide Δla sumendum est triplum pyramidis triangulæ primi generis præcedentis: in quadrata quadruplum, in pentagona quincuplum, in hexagona sexcuplum, sicut in 39.ª factum est. In heptagona septuplum. In octagona octuplum. Atque ita ex diffin. constabit, sicut in 39.ª propositum. Exempli gratia, pyramis quadrata centralis quinti loci est 85. qui numerus constat ex radice quinta, scilicet 5. & ex quadruplo pyramidis Δla primi generis, scilicet ex 80. & similiter in cæteris locis.

COROLLARIVM.

Manifestum est igitur, quòd sicut pyramis centralis quadrata supra triangulum pyramidem collateralem: ita & pentagona supra quadratam: nec non hexagona supra pentagonam, & heptagona super hexagonam: & octogona super heptagonam semper addidit præcedentem pyramidem triangulam primi generis. Sicut videlicet basis centralis supra basim collateralem laterum vnitate pauciorum, addit præcedentem primi generis triãgulum.

PROPOSITIO 75ª.

125 {95, 30} *Omnis item pyramis centralis constat ex tot pyramidibus primi generis; ex quot basibus primi generis eius; basis constare ostẽsa est, & eiusdem nominis atque loci.* Exempli gratia: pyramis hexagona centralis quinta, scilicet 125. constat ex quintã pyramidẽ hexagona primi generis, scilicet 95. & ex 4ª pyramide quadrata primi generis, scilicet 30. quoniam scilicet basis hexagona cẽtralis quinta, scilicet 61. constat ex hexagono quinto, scilicet 45. & ex quadrato quarto primi generis, scilicet 16. vt in 70ª. ostensum fuit: quod quidem demonstratum est in 40ª huius, quoad hexagonam pyramidem: & similiter hic generaliter de omni centrali pyramide ostendetur.

Sed in horum exemplum exponemus in tabella pyramides vtrasque, tam scilicet primi generis, quàm centralis, in quibus propositionum veritas apparet.

Pyramides

Pyramides p[i] Generis. *Pyramides Centrales.*

1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1
2	4	5	6	7		5	6	7	8	9	10
3	10	14	18	22		15	19	23	27	31	35
4	20	30	40	50		34	44	54	64	74	84
5	35	55	75	95		65	85	105	125	145	165
6	56	91	126	161		111	146	181	216	251	286
7	84	140	196	252		175	231	287	343	399	455
8	120	204	288	372		260	344	428	512	596	680
9	165	285	405	525		369	489	609	729	849	969
10	220	385	550	715		505	670	835	1000	1161	1330
radices	△les	□tes	⬠nes	*nes		△les	□tes	⬠nes	*nes	*Hept.*	*Oct.*

PROPOSITIO 67[a].

Omnis columna centralis coagmentatur ex radice collaterali, tanquam axe, & ex congerie praecedentis triangulae columnae suiq; trianguli in primo genere in numerum lateri multiplicata.

Quod 46[a] huius, ostendit de columna hexagona cẽtrali: hæc pñs de omni centrali columna proponit; & demonstratio hic & ibi eadẽ est. Itaq; in omni columna sumẽda est radix collateralis: sed in columna triangula, cõgeries præcedẽtis triãgulæ columnæ, suique △li in primo genere, multiplicanda est in ternarium. In colũna quadrata in quaternarium: pro columna pẽtagona in quinarium, per hexagona in senarium, per heptagona in septenarium, per octogona in octonarium. Atque ita ex diffin. constabit, sicut in 46. propositum. Exempli gratia: columna centrali quadrata quinti loci, est 225. in conflatur ex radice quinta, scilicet 5 & ex congerie præcedentis triangulæ columnæ suique trianguli in primo genere, scilicet 50. quadruplicata, hoc est, ex 200. & similiter in cæteris locis, & in cęteris columnis. 225 { 5 200

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd sicut columna centralis quadrata supra triangulam centralem columnam collateralẽ: ita & pentagona supra quadratam: Nec non & hexagona supra pentagonam, & heptagona supra hexagonam, & octogona super heptagonam semper addit præcedentem columnam triangulam cum suo triangulo primi generis. Hoc idem de pyramidibus ante præmissæ corrollarium inferebat.

PROPOSITIO 77ª.

Omnis item columna centralis constat ex tot columnis primi generis, ex quot eiusdem generis basibus eius basis constare ostensa est, & eiusdem nominis acque loci. Columnis tamē præcedentis loci unà cū basibus proprijs acceptis. Exempli gratia: columna centralis hexagona quinta, scilicet 305. conflatur ex columna hexagona primi generis quinta, scilicet 225. & ex cubo quarto 64. vnà cum suo quadrato 16. quoniam, scilicet basis hexagona centralis quinta, scilicet 61. constabat ex hexagono quinto scilicet 45. & ex quadrato quarto primi generis, scilicet 16. per 70ª præmissam. Quod quidem in 45ª huius ostensum est, quo ad columnam hexagonam: & demonstratio, simili processu, ad omnem centralem columnam extendi potest. Ad verificandum quod hic proponitur.

305 { 225, 64, 16 }

PROPOSITIO 78ª.

In omnibus tribus siue planis, siue pyramidibus, siue columnis centralibus, collateralibus, sub continuato laterum numero, susceptis, aggregatum extremorum est duplum ad medium. Exempli gratia, sumatur quintus triangulus 31. quintus quadratus 41. & quintus pentagonus 51. centrales. Aio quòd in his aggregatum extremorum, hoc est 31. & 51. est duplum ipsius 41. medij. Nam, vt constat ex diffin. talium formarum, differentia trianguli & quadrati est æqualis differentiæ quadrati & pentagoni: quandoquidem talis differentia est triangulus quartus primi generis. Quamobrem, per 28ª huius, congeries extremorum est duplū medij, quod est demonstrandum. Similiter, si sumantur pyramis triangula quinta 65. pyramis quadrata quinta, scilicet 85. & pyramis pentagona quinta 105. quoniam eodem excessu continuatur per corollarium 74ª præmissę, per dictam 28ª constabit propositum. Item in columnis tribus centralibus, scilicet triangula quinta 155. quadrata quinta 205. Pentagona quinta 255. quarum excessus idem est, per 76ª pręmissæ corollarium: nihilominus, per dictam 28ª verificatur conclusio. Nec secus si pro quinto, quotuscunque capiatur in ordine locus; per eadem pręcedet syllogismus ad approbandum propositum. In quorum exemplum, sicut dudum planos numeros & pyramides, ita nunc columnas tam primi generis, quàm centrales in indice sequenti exanabimus.

{ 31, 41, 51 } 82

{ 65, 85, 105 } 170

{ 155, 205, 255 } 410

Columnæ

Columnæ p^i Generis.					*Columnæ Centrales.*					
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	6	8	10	12	8	10	12	14	16	18
3	18	27	36	45	30	39	48	57	66	75
4	40	64	88	112	76	100	124	148	172	396
5	75	125	175	225	155	205	255	305	355	405
6	126	216	306	396	276	366	456	546	636	726
7	196	343	490	637	448	595	742	889	1036	1183
8	288	512	736	960	680	904	1128	1352	1576	1800
9	405	729	1053	1377	981	1305	1629	1953	2277	2601
10	550	1000	1450	1900	1360	1810	2260	2710	3160	3610
radices	$\triangle^{le}$	$\square^{te}$	⬠^{ne}	$*^{ne}$	$\triangle^{le}$	$\square^{te}$	⬠^{ne}	$*^{ne}$	*Hept.*	*Oct.*

His ad Lectoris meliorem intelligentiam ita descriptos, ad reliqua properabimus.

PROPOSITIO 79ª.

Omnis columna triangula centralis cum quadrato & triãgulo primi generis collateralibus coniuncta, triplũ facit suæ pyramidis. Exẽpli gratia, colũna triãgula centralis quinta. s. 155. cũ quadrato quinto 25. & triangulo quinto 15 primi generis coniũcta, facit 195. qđ triplũ est pyramidis centralis quintæ 65. Quod sic ostenditur. Columna triangula centralis quinta, per 77ª constat ex tribus primi generis formis, scilicet columna triangula quinta, cubo quarto, & quadrato quarto. His appono eiusdẽ generis quadratũ quintũ, qui per 11ª valet triãgulũ 5ũ & 4ũ: appono item triangulũ aliũ quintum. Atq; ita ostẽdendũ erit quod totum hmôi aggregatũ ex columna $\triangle^{la}$ 5ª cubo 4º, quadrato quarto, duobus triangulis quintis & $\triangle^{lo}$ 4º primi generis simul triplum est pyramidis $\triangle^{læ}$ 5ᵗæ centralis. Sed cum pyramis $\triangle^{la}$ 5ª cẽtralis, per 75ª huius, cõstruatur ex cõbinatione duarũ pyramidũ primi generis, scilicet $\triangle^{læ}$ 5æ & quadratæ 4æ: iã demõstrãdũ erit, q. supradictũ aggregatũ triplũ est pdictæ cõbinationis. Quod sic patet. Vna pars illius aggregati. s. colũna triãgula quinta, cũ duobus triangulis quintis, per 50ª huius, æqualis est triplo pyramidis triãgulę quintæ, quæ fuit vna pars cõbinationis.

per 77ª
Col. $\triangle^{le}$ 5ª 2ⁱ
155.
{ Col. $\triangle^{la}$ 5ª pª +
75
Cub. 4º χ
64
$\square$ 4º
16 χ
$\triangle$lº 5º pⁱ +
15 }

per 11ª
$\square$º 5º
25
{ $\triangle$lº 5º +
15
$\triangle$lº 4º χ
10 }

Pyr. $\triangle^{la}$ 5ª 2ⁱ
65
per 75ª
{ pyr. $\triangle^{la}$ 5ª pⁱ +
35
pyr. $\square^{ta}$ 4ª pⁱ
30 χ }

Item que reliqua pars aggregata, ſcilicet cubus quartus, cum quadrato & Δ[lo] quartis, æqualis eſt, per 63ᵃ huius, triplo pyramidis quadratæ quartæ, quæ fuit altera pars combinationis. Itaque, quoniam duæ partes aggregati duabus partibus combinationis, ſingulæ ſingulis triplæ ſunt: Idcirco, per primã quinti Elementorum, & totum aggregatum totius combinationis, triplum erit, quòd fuit demonſtrandum: & demõſtratio à quinto ad quem vis alium locum transferetur ad confirmandum propoſitum.

PROPOSITIO 80ᵃ.

Omnis columna quadrata centralis cum duplo quadrati collateralis primi generis coniuncta triplum facit ſuę pyramidis. Exempli gratia: columna quadrata centralis quinta. ſ. 205. cũ duplo quinti quadrati ex p° genere, hoc eſt, cum 50. facit 255. quod triplũ eſt ſuæ pyramidis, ſcilicet 85. qđ ſic cõcluditur. Colũna quadrata centralis quinta, per 77ᵃ, conſtat ex tribus primi generis formis, ſcilicet cubo 5°, cubo 4° (quæ ſunt colũnæ quadratæ) & quadrato 4°. His applico quadratũ quintũ: & alterum quadratũ quintũ, qui, per 11ᵃ æquiualet duos triangulos, quintum, & quartũ: atq; ita oſtendendũ erit, qđ totũ tale, aggregatũ ex cubo quinto, cubo quarto quadrato 4°, quadrato quinto, & triangulis 5° & 4° primi generis, ſimiliter triplum eſt pyramidis quadratę centralis quintæ. Cunque pyramis talis, per 75ᵃ huius, conſtat ex combinatione duarũ pyramidũ primi generis, ſcilicet quadratę quintæ, & quadratæ quartæ: Iã demonſtrandũ erit, ꝙ ſupradictũ aggregatũ triplũ ſit ad prædictam cõbinationẽ: ꝙ ſic deducitur. Vna pars illius agregati. ſ. cubus, quadrat⁹, & triangulus quinti loci, per 63ᵃ, ſimul faciunt triplũ pyramidis quadratæ quintę, quę fuit vna pars combinationis. Itemq; reliqua pars aggregati. ſ. cubus, quadratus, & triangulus quarti loci, per eandẽ 63ᵃ, ſimul facit triplum pyramidis quadratę quartæ, quæ fuit reliqua pars combinationis: quamobrẽ duæ iam partes aggregati triplæ ſunt ad duas partes cõbinationis, ſingulæ. ſ. ad ſingulos. Et ideò, per quinti Elementorum primã, totum aggregatum totius cõbinationis triplũ erit, qđ demonſtrãdũ fuit. Et ſimiliter à quinto ad quemuis locũ transferetur demonſtratio propoſiti.

per 77ᵃ
Col. □ 5ᵃ 2ⁱ 205. { Cub⁹ 5⁹ 125 + / Cub. 4⁹ 64 χ / □⁹ 4⁹ 16 χ }
□. 5⁹ pⁱ 25. +
per 11 Δl⁹ 5⁹ pⁱ
□⁹ 5⁹ 25 { 15 + / Δl⁹ 4⁹ p⁹ 10 χ }

Pyr. □ 5ᵃ 2ⁱ 85 per 75ᵃ { pyr. □ 5ᵃ pⁱ 55 + / pyr. □ᵃ 4ᵃ pⁱ 30 χ }

PROPOSITIO 81ᵃ.

Omnis columna pentagona centralis cum duplo quadrati collateralis, & cum triangulo præcedente primi generis, triplum facit ſuæ pyramidis. Exempli gratia: columna pentagona centralis quinta 255. cum duplo quadrati quinti. ſ. 50. & cũ

Δ[lo]

Δ^{lo} quarto.s.10.primi generis,cõficit 315.qđ triplũ est pyramidis pentagonæ centralis quintæ.s.105.qđ sic demonstrat. Colũna pentagona centralis quinta per 77ª cõstat ex tribus primi generis formis: videlicet colũna pẽtagona 5^{a},cubo 4°, & □^{to} 4°.His adiungo duplũ □^{ti} quinti,& triangulũ quartũ, atq; ita demõstrandũ erit,quòd totum id aggregatum ex columna pẽtagona 5^{a}, cubo 4°, quadrato 4°, duobus quadratis quintis,& Δ^{lo} 4° simul triplũ sit pyramidis pẽtagonæ cẽtralis quintæ.Verùm pyramis hmôi per 75^{a} huius, cõstat ex cõbinatione duorum pyramidum primi generis.s.pentagonæ quintæ,& triangulæ 4^{tæ}, & proptereà demõstrandũ erit, quòd memoratum aggregatum præfatæ cõbinationis triplũ est.Hoc pacto: vna pars illius aggregati.s.columna pẽtagona cum duplo quadrati ex 5° loco, per 64^{a}, similr ęquat triplum pyramidis pẽtagonæ 5^{tæ} ,quæ.s.est vna pars combinationis: Itẽ residua pars aggregati.s.cubus, quadratus,& triangulus quarti loci, simul æquat,per 63^{a}, triplũ pyramidũ □^{rũ} quartæ,quæ iã est residua pars combinationis. Sic,quoniam duę partes aggregati ad duas partes combinationis , singulæ ad singulas triplæ sunt:ideò per quinti elementorum primam, totum aggregatum totius cõbinationis triplum erit,& similiter in quocunque alio loco verificatur propositum.

per 77^{a} — Col. ⬠ 5^{a} p^{o} — 175. +
Co. ⬠ 5^{a} 2^{i} — 405.
Cub^{o} 4° — 64. ×
□ti^{o} 4° — 16. ×
□ 5°
□^{o} 5° — 50.
Δ 4° p^{i} — 10. ×

Pyr. ⬠ 5^{a} p^{o} — 75. +
Py. 5^{a} 2^{i} — 105 per 75^{a}
Pyr.□^{ta} 4^{a} p^{o} — 30. ×

S C H O L I V M.

Quo autem pacto columna hexagona centralis conficiat , sicut cæteræ columnę suarum singulæ pyramidum, triplum suæ pyramidis satis demonstratum est in sexagesima sexta.

P R O P O S I T I O 82^{a}.

Omnis columna heptagona cum hexagono primi generis & quadrato collateralibus atque triangulo præcedenti coniuncta, efficit triplum suæ pyramidis. Exempli gratia : columna heptagona quinta 355. cũ hexagono quinto, quadrato quinto, & triangulo 4° in p^{o} genere : hoc est,cum 45.25.10.conficit 435. quod aio triplum esse pyramidi heptagonæ quintæ, scilicet 145.Quod sic demonstro.Columna heptagona quinta,per corollarium 76.huius,constat ex tribus formis,ex columna hexagona quinta centrali, & ex columna quarta primi generis,atque triangulo quarto. His adiungo hexagonum quintum primi generis,ac quadratum quintũ,& triãgulum quartum. Atq; ita demonstrãdum erit, ꝙ totum hocce aggregatum ex columna qnta centrali hexagona, columna triãgula quarta primi generis,triãgulo quarto,hexagono quinto, quadrato

perCoroll.76^{a} — Col. ✱. 5^{a} 2^{i} — 305 +
Col.hept. 5^{a} — 355
Col.Δ^{la} 4^{a} p^{i} — 40 ×
Δ^{o} 4° p^{o} — 10 ×
✱ 5° p^{o} — 45. +
□ 5° — 25 +
Δ 4° — 10

quadrato quinto, & alio triangulo quarto, simul æquiualet triplo pyramidis heptagonæ quintæ. Cunq; per corollarium 74ª huius talis, quinta pyramis constituatur ex combinatione duarum pyramidũ, scilicet ex hexagona centrali quinta, & triãgula quarta primi generis: Iã ostendendũ erit, quod dudum dictũ aggregatũ ad dictã mox combinationẽ triplũ erit, hoc scilicet pacto. Vna pars illius aggregati, scilicet columna hexagona centralis quinta cum hexagono primi generis quinto, & quadrato quinto, simul per corollarium primum 66ª triplum facit pyramidis hexagonæ centralis quintæ: quæ pars est vna combinationis. Item columna triangula, cũ duobus triangulis quarti loci, per 50ª huius, triplum facit pyramidis triangulæ quartæ, q̃ residuum est combinationis. Quare cum duæ partes aggregati, duarum partium combinationis, singulæ singularum triplæ sint: Iã per primam quinti Euclidis: totumq; aggregatum totius combinationis triplũ erit. In hoc quinto loco: & similiter in omni alio, quod est propositum.

Pyr.hept. 5^a 145. { Pyr.✳.5^a 2^i 125. + Pyr.△^{la} 4^a p^g 20. χ }

Corollarium.

Et pro hexagono primi generis & quadrato collaterallibus, substituere potes hexagonũ centralem, & imparem collaterales. Nam, per corollarium 2^u 66^a, hexagonus centralis & impar simul sumptis, valent hexagonũ primi genexis & quadratũ collaterales, hoc est, in quinto loco, huius exempli.

Propositio 83^a.

Omnis columna octogona, cum hexagona primi generis, ac quadrato collateralibus, duploq; triãguli præcedentis coniuncta, facit triplum suæ pyramidis. Exempli grãtia, columna octangula quinta 405. cum hexagono primi generis & cum quadrato quinto, hoc est, cũ 45. & cum 25. duploque trianguli quarti, scilicet cum 20. conficit 495. quod aio triplum esse pyramidis octangulæ quintæ, scilicet 165. Quod sic ostendo. Columna octangula quinta, per corollarium 76ª constituitur ex duabus columnis, septangula quinta: triangula 4ª primi generis, & triangulo quarto. His ergo associo hexagonũ primi generis, & quadratum quintũ: nec non duos triangulos quartos. quo facto, demonstrandum erit, quòd totum istud aggregatum, scilicet ex columna septangula quinta, columna triangula quarta primi generis, triangulo quarto, hexagono quinto, quadrato quinto, duploque trianguli quarti, simul triplum consummabit pyramidis octangulæ quintæ.

Col.8^{la} 5^a 405. { Col.7^{la} 5^a 355. + Col.△^{la} 4^a p^i 40. χ △^g 4^g p^g 10. + }

✳^g 5^g p^i 45. +
□^g 5^g p^i 25. +
△ 4^g p^i
△ 4^g p^i 20. χ

tæ. Cumq; per corollarium 74ᵉ huius, talis pyramis quinta conficiatur ex pyramidis septangulæ quintæ, & pyramidis triangulæ quartæ combinatione: Iam ostendendũ erit, quòd dictũ aggregatũ dictæ combinationis triplũ erit. hoc videlicet pacto. Vna pars illius aggregati, scilicet colũna septangula quinta cum hexagono primi generis quinto, quadrato quinto, & quadrato 4° simul efficit, per præcedentẽ propositionẽ, triplũ pyramidis septangulæ quintæ, quæ pars est vna cõbinationis. Itẽ residuũ aggregati, scilicet columna triãgula 4ᵃ primi generis, cũ duplo trianguli quarti per 50ᵃ huius, triplũ facit pyramidis triangulæ quartæ: qui est residuũ cõbinationis. Itaque, cum duæ partes aggregati duarũ partium cõmbinationis singulæ singularum triplæ sint, iã & per primã quinti Euclidis, totũ aggregatũ toti' cõbinationis triplũ erit. In hoc quinto loco, & similiter alibi. Qd est propositũ.

pyr. 8ˡᵃ 5ᵃ 165 { pyr. △ˡᵃ 5ᵃ 145 + pyr. ▽ˡᵃ 4ᵃ pˡ 20.

Col. 8ˡᵃ 5ᵃ 405 { Col. 7ˡᵃ 5ᵃ 355 · Col. □. 4ᵃ pᵃ 40. · △. 4ᵃ pᵇ 10.

*. 5ᵃ pᵃ 45

□. 5ᵃ pᵃ 25.

△ 4ᵃ pᵃ

▽ 4ᵃ pᵃ 20

Pyr. 8ˡᵃ 5ᵃ

Pyr. 8ˡᵃ 5ᵃ 165 { 145 Pyr. △ˡᵃ 4ᵃ pˡ 20.

COROLLARIVM.

Et pro hexagono primi generis & quadrato collateralibus substituere potes hexagonum centralem & imparem collaterales. Nam, per corollarium 2ᵘ 66ᵉ hexagonus centralis & impar simul sumpti, valent hexagonum primi generis & quadratũ collaterales, hoc est, in quinto loco, per assumpto exemplo.

PROPOSITIO 84ᵃ.

Sicut columna triangula centralis cum quadrati & trianguli collateraliũ primi generis aggregato coniuncta, triplum conficit suæ pyramidis. Ita etiam sequentium columnarũ centralium tã quadrata cũ dicto aggregato & vno triangulo præcedenti: q̃ pentagona cũ eodẽ aggregato & duplo triãguli præcedẽtis: q̃ hexagona cum tali aggregato & triplo triãguli præcedẽtis, quàm septãgulã cũ ipsomet aggregato & quadruplo triãguli præcedẽtis: quãque octangula cũ eo ipso aggegato & quincuplo triãguli præcedẽtis coiũcta, triplũ efficit suæ pyramidis. Sũto columnæ cẽtrales collaterales a. quidẽ triãgula, ipsa b. quadrata, ipsa c. pentagona, ipsa d. hexagona, ipsa e. septangula, & ipsa f. octangula. Item g. quadratus & h. triangulus eiusdem loci, hoc est, collaterales ipsarum columnarũ & ex ipso genere. Itẽ per triãgulus eiusdẽ generis præcedẽtis locii & ex alia parte sunto pyramides centrales columnis dictis collaterales: Ipsa quidem l. triangula, ipsa m. quadrata, ipsa n. pẽtagona, ipsa e. hexagona, ipsa p. septangula. ipsaque q. octangula: quibus dispositis, ostẽdẽdũ est, quòd sicut, per 79ᵃ huius aggregatũ ex a g h. triplum est ipsius l. ita & aggregatũ

ex

Col	□△.	△	pyr.
a.	g h	———	l
b.	g h	K ———	m
c.	g h	K K ———	n
d.	g h	K K K ———	o
e.	g h	K K K K ———	p
f.	g h	K K K K K ———	q
		r. f.	

Exemplum pro loco 5°

Col. 5.	□. 5.	△. 5.	△. 4.	pyr. 5
155.	25.	15.	——	65
205.	25.	15.	10 —	85
255.	25.	15.	20 —	105
305.	25.	15.	30 —	125
355.	25.	15.	40 —	145
405.	25.	15.	50 —	165

40. 20.

Col. △. Pyr. △. 4ᵃ

Col.	□△.	△		pyr.
a.	g h		———	l
b.	g h K		———	m
c.	g h	K K	———	n
d.	g h	K K K	———	o
e.	g h	K K K K	———	p
f.	g h	K K K K K	———	q
		r.	ſ.	

Exemplum pro 5° loco

155.	25.	15.	———	65
205.	25.	15.	10 —	85
255.	25.	15.	20 —	105
305.	25.	15.	30 —	125
355.	25.	15.	40 —	145
405.	25.	15.	50 —	165
Col.5.□.	5.△.	5.△		4.pyr.5
	40.		20.	

ex b g h.& K. triplum erit ipſius m. nec non aggregatum ex c g h. duploque ipſius k triplum ipſius n. itemq; aggregatũ ex d g h. triploque ipſius k. triplum ipſius o. adhuc aggregatum ex e g h.& quadruplato k. triplum ad p.& tandem aggregatum ex f g h. & quincuplato k. triplũ ad ipſum q. hoc pacto. Sit colũna triangula primi generis præcedens, hoc eſt, collateralis ipſi k. triangulo ſignata per r. pyramis autẽ centralis præcedens, hoc eſt, collateralis columnæ r. ac triangulo k. eſto notata per ſ. cumque aggregatum ex a g h. triplũ ſit ipſius l. per 79ᵃ præmiſſam, oſtendã quòd, aggregatũ ex b g h. & k. triplum eſt ipſius m. Nam per corollarium 76ᵃ huius, ipſa b. addit ſuper a. ipsã r. & ipſum k. Et ideò aggregatum b g h k. addit ſuper aggregatum a g h. ipſam r.& duplum ipſius k. Item ipſa m. ſuper l. per corollarium 74ᵃ addit ipſam ſ. Triplum eſt autem additamentum additamẽti, hoc eſt, ipſum r. cum duplo ipſius k. duplum eſt ipſius ſ. per 50ᵃ huius. Igitur per primam quinti Eucl. aggregatum ex b g h. & k. triplum erit ipſius m. quod fuit oſtẽdendum. Et quoniam c. addit ſuper b. ipſam r.& alium k. per corollarium 76ᵃ huius,& n. ſuper m. addit rurſus ipſam ſ. per corollarium 74ᵃ Similiter penitus & eodem proceſſu oſtendã, quòd aggregatum c g h. cum duplo ipſius k. triplum eſt ipſius n. Nec non, quòd aggregatum d g h. cum triplo ipſius k. triplum eſt ipſius o. Adhuc quod aggregatum e g h. cum quadruplo ipſius k. triplum eſt ipſius p.& demum, quòd aggregatum f g h. cum quincuplo ipſius k. triplum eſt ipſius q. ſicut demonſtrandum proponitur.

COROLLARIVM.

Et eodem cremento procederemus, ſi vltra octangulam columnam ac pyramidem confingeremus formas ſequentes, ſcilicet enneagonam,& decagonam,& reliquas deinceps. Sed ne curioſitas modum excedat, ſatis ſit nobis hucuſque progreſſi; & protinus de regularibus ſolidis diſſerere incipiamus, ne quid in hac ſpeculatione intactum relinquatur.

PROPOSITIO 85ª.

Omnis par cum paribus omnium praecedentium locorum coniunctus, conficit collateralem parte altera longiorem. Exempli gratia, par quinti loci, scilicet 8. coniunctus cum paribus praecedentibus 6.4.2.0. conflat 20. parte altera longiorem quintum. Nam per 3ª huius quatuor dictorum parium aggregatum duplum est ad aggregatum totidem radicum ab vnitate continuatarum, hoc est, ad triangulum primi generis quartum. Item ad eundem triangulum quartum duplus est parte altera longior quintus, scilicet 20. per octauam huius. Aequalis igitur est parte altera longior quintus dicto quatuor parium numerorum aggregato. Quod fuit demonstrandum. Et demonstratio ad alium quemuis locum transferetur vt constet propositum.

0.	0.	1.
2.	2.	2.
4.	6.	3.
6.	12.	4.
8.	20.	10.
20		

PROPOSITIO 86ª.

Si numerorum imparium ab vnitate per ordinem continuatorum singulorum singuli quadrupli post Ziframn disponantur, ex eorum successiua aggregatione cõstruetur quadrati numeri à paribus collateralibus in se multiplicatis producti. Exempli gratia, quotuis ab vnitate impares, vt puta quatuor 1.3.5.7. singuli quadruplicentur, & post Ziframn disponãtur sic 0.4.12.20.28. aio, quòd horum quadruplorum omnium aggregatum est numerus quadratus, qui fit à numero pari quinti loci in se ducto, hoc est, ab octonario. Nam, per 15ª huius ex aggregatione dictorum quatuor imparium fit quadratus quartę radicis. Quare quadrupli eorumdẽ imparium conficient quadruplum dicti quadrati, hoc est, quadratum, qui fit ex duplo dictæ radicis in se ducto, hoc est ex octonario in se multiplicato. Nam latera, quorum quadrata sunt in quadrupla ratione, seruant ad inuicem rationem duplam. Similiter per locis alijs constat propositum.

1.	0.	0.	1.
3.	4.	2.	1.
5.	12.	4.	3.
7.	20.	6.	4.
16.	28.	8.	
	64.		

PROLOGO-

PROLOGOMENA.



OC à principio decreuimus, ingeniose Lector, in hisce nostris numerarijs speculationibus, vt non solum obscurè ab alijs tradita facilius demonstraremus, sed etiam omissa suppleremus. Ne quid igitur, quod ad formas numerorum, pertinet, desyderaretur, sicut pyramidibus & columnis numerarias figuras non vnius generis, sicut & planis rectilineis, hactenus adsignauimus; ita & quinque illa geometrica solida, quæ vulgo regularia nuncupantur, adaptatis singula numeris imitabimur: structuram quidem primo definientes, & inde proprietatem singulorum, atque colligantias, per demonstrationes & exemplo exponentes. Sed, cum quinque sint apud egregios Geometras regularia illa, mirum in modum à Platone celebrata corpora, Pyramis uel Tetrahedrum, Octahedrum, Cubus, Icosahedrum, atque Dodecahedrum; è quibus sicut pyramidem tetrahedrum; ita & cubum hexahedrum quoq; à basium numero vocari nemo prohibet. Ex his duæ iam in numeris nostris tractata sunt formæ; pyramis scilicet in ordine primarũ pyramidum: & cubus inter eiusdem ordinis columnas. Sequitur nunc octahedrum, quod semper ex duabus proximis quadratis pyramidibus non aliter, quàm quadratis ex duobus proximis triangulis coalescit. Supersunt duo reliqua, quæ per numeros non nisi centralia intelligi & construi poterunt: quemadmodum in planis formæ secundi ordinis astruebantur. Et sicut in planis septanguli & octanguli numeri non, nisi per centrum & ambitum, conflari commodè possunt; ita fit in huiusmodi duobus postremis solidis. Item, sicut triangulos, quadratos, pentagonos, & hexagonos

xagonos

xagonos non solùm primi generis, sed etiam cētraliter efformauimus ad implendum secundum formarum ordinem; ita & hic licebit reliqua tria priora solida, pyramidem, octahedrum, & cubum centraliter, sicut postrema duo per numeros configurare. Cum itaq; tam pyramides triangulæ, quàm cubi primæ speciei satis iam superius constructi & expositi sint, & eorum proprietates declaratæ: nunc & octahedri numeri eiusdem speciei sic quidem faciliter construentur, si ab vnitate exordium capientes, (vt diximus) duas quasq; proximas primi generis quadratas pyramides coniūgamus: sicuti fit in ipso continuo geomotricoq; octahedro solido. Cum itaque pyramides quadratæ primæ huiusmodi se in ordine habeant, vt superius describebātur, iā & octahedri numeri primæ speciei singuli & collaterali & præcedenti pyramide cōiūctis haud difficilius sub iisdem exarabūt. Hoc vz pacto.

1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	*Pyramides quadratæ primi generis.*
1	6	19	44	85	146	231	344	489	670	*Octahedri primi generis.*

Et eadem aggregatione in infinitum fiet processus, & si non actu, potentia tamen, quæ nunquàm theorico intellectui negatur. Agendum nunc de solidis regularibus centralibus, in quibus semper vnitas in centro ponitur sicut & in planis numeris centralibus. Sed operepreciũ est intelligere imprimis quo pacto disponendæ sint cæteræ vnitates, & quibus in locis, ad efformanda, vt decet, talia solida numeralia. Nec dubium, quin in singulis, posita vnitate cētri tam per singulos solidos angulos, quàm per singula basium centra singulæ sint vnitates disponendæ. Itaque cum pyramis habeat quatuor angulos & totidem bases, habebit cum centrali vnitate nouem vnitates. Cum autem octahedrum habeat

beat sex angulos, & octo bases & centrum; habebit vnitates quindecim. & totidem vnitates cubus: quandoquidem habent angulos octo & bases nouem & centrum. Vnde sicut secundus ab vnitate octahedrus, secundo adequatur cubo; ita & tertius tertio: & quartus quarto: & sequentes sequentibus, singuli singulis in infinitum semper æquales existunt: vt postea demonstrabimus. Deinde cũ Icosahedrum habeat 12. angulos solidos, bases autem 20. & centrum; constituetur ex vnitatibus 33. & ex totidem vnitatibus dodecahedrus, vt pote qui habet angulos 20. bases 12. & centrum, hoc est secundus Icosahedrus secundo Dodecahedro æqualis est. Et similiter deinde tertius tertio: & quartus quarto: & sequentes sequentibus singuli singulis Icosahedri Dodecahedris in infinitum semper adæquabuntur propter eandem, quæ in Octahedro & cubo, reciprocam angulorum & basium numerorum æqualitatem: vt in suo loco in propositionibus ostendemus. Sed quo pacto sequentes solidi numeri, hoc est, sequentium locorum formentur, audi. Nec te, perspicacissime lector, tædeat ea perpẽdere, quæ ad huiusmodi numerarias formas, ab alijs omissa, & ad speculationis Arithmeticæ perfectionẽ maximè spectãt. Cognosces enim proprietates earum notatu dignissimas, nec nisi curiosis ingenijs patulas. Imaginor itaq; in hisce quinque singulis regularibus solidis, à centro ad angulos educi singulas semidiametros: quæ quidem in pyramide erunt quatuor in octahedro 6. in cubo 8. in Icosahedro 12. In dodecahedro 20. quot scilicet sunt solidi anguli, seu vertices solidorum. Deinde in ijsdem intelligo linearia latera quæ vertices ipsos coniungunt. in pyramide scilicet latera sex, In octa-

octahedro 12. In cubo totidem. In icosahedro 30. In dodecahedro totidem. Quæ quidem, cum semidiametris latera singula binis totidem triangulos continent quot sunt latera. His suppositis, iam nulli obscurum erit inter trina quidem quælibet huiusmodi triangula pyramides intercipi, quę tot sunt quot ipsius solidi bases, in tetrahedro .s. pyramides quatuor triangulas, in octahedro octo triangulas; in icosahedro viginti similiter triangulas. At in cubo inter quaterna triangula, pyramides sex quadratas. In dodecahedro inter quina triangula, pyramides 12. pentagonas. Quibus consideratis, iam constabit, vnumquodque horum solidorum construi debere ex vnitate centrali, ex vnitatibus per semidiametros dispositis, ex numeris triangulis, exque numeris pyramidibus. Hoc modo. Pyramidem, siue tetrahedrum, ex centro, ex quatuor semidiametris, ex senis triangulis, & ex quatuor pyramidibus triangulis. Octahedrum ex centro, ex senis semidiametris, ex duodecim triangulis, & ex 8. pyramidibus triangulis: cubum ex centro, ex 8. semidiametris, ex 12. triangulis, & ex senis pyramidibus quadratis. Icosahedrum ex centro, ex duodecim semidiametris, ex triginta triangulis, & ex 20. pyramidibus triangulis. Dodecahedrum ex centro, ex 20. semidiametris, ex triginta triangulis, & ex 12. pyramidibus pentagonis. Postquam itaque vnitas præbet singulis solidis huiusmodi, nomen: quippe quæ nullam non numeri spetiem suscipit; iam in secundo loco (vt diximus) pyramis habebit 9. vnitates; Octahedrus 15. cubus totidem. Icosahedrus 33. Dodecahedrus totidem.

Z *Nam*

Nam cētrum cum angulis & basium centris tot vnitates suscipiunt. Quo quidem in loco semidiametri sunt ipsę angulorum vnitates: trianguli nulli: pyramides verò solæ vnitates, quæ sunt basium centra. Quare hic tam semidiametri, quàm pyramides exordium sumunt. Intellige autem semper △los primæ speciei; pyramides verò secundæ: quoniam oportet eas esse centrales. In tertio mox loco crescunt singulæ semidiametri per vnitatem; trianguli autem exordium capiunt, suntque vnitates; pyramides verò sunt, quæ vnitatem sequuntur: triangulæ quinarium singulæ; quadratæ senarium: ac pentagonæ septenarium habentes: In quo quidem loco pyramis constat ex 1. ex quatuor semidiametris, scilicet 8. ex sex triangulis, scilicet 6. & ex quatuor pyramidibus, scilicet 20. quæ conficiunt 35. Octahedrus constat ex 1. ex sex semidiametris, scilicet 12. ex duodecim triangulis, scilicet 12. & ex 8. pyramidibus triangulis, scilicet 40. quæ constant 65. & tantundem faciunt vnitas: octo semidiametris, scilicet 16. ac 12. trianguli, scilicet 12. cum sex pyramidibus quadratis. s. 36. pro cubo construendo: nam octahedrus & cubus semper sunt æquales. Icosahedrus fit ex 1. ex 12. semidiametris, scilicet 24. ex 30. triangulis, scilicet 30. ex 20. pyramidibus triangulis, scilicet 100. vnde complectitur 155. Et tantundem suscipit huius loci dodecahedrus. Nam vnitas 20. semidiametri, scilicet 40. trianguli 30. scilicet 30. pentagoni pyramidis 12. scilicet 84. simul constant dictū numerum, scilicet 155. In quarto loco semidiametri singulæ habent 3. trianguli singuli 3. pyramides, triangulæ singulæ 15. quadrati 19. pentagoni 23. vbi pyramis cum constet ex

vnitate ex quatuor ſemidiametris, ſcilicet 12. ex ſex triangulis, ſcilicet 18. ex quatuor pyramidibus, ſcilicet 60. habebit 91. Octahedrus autem ex vnitate ſex ſemidiametris ſcilicet 18. ex 12. triangulis ſcilicet 36. & ex octo pyramidibus triãgulis .ſ. 120. conſtans, habebit 175. & tantundẽ cubus: nã vnitas, octo ſemidiametri ſcilicet 24. duodecim trianguli ſcilicet 36. & ſex pyramides, ſcilicet 114. eundem numerũ 175. conficiunt: Item icoſahedrus conſtans ex vnitate, ex 12. ſemidiametris, ſcilicet 36. ex 30. triangulis, ſcilicet 90. & ex 20. pyramidibus triangulis ſcilicet 300. comprahendet 427. & tantundem Dodecahedrus. Nam vnitas viginti ſemidiametri, ſcilicet 60. triginta trianguli, ſcilicet 90. duodecim pyramides pentagonæ, ſcilicet 276. eundem numerum 427. conſtituunt. In quinto loco ſemidiametri ſingulæ habent 4. trianguli ſinguli 6. pyramides triangulæ ſingulæ 34. quadratæ 44. pentagonæ 54. Unde aggregatis vnitate ſemidiametris, triangulis, & pyramidibus prædicto ſub numero ſumptis, conſtabunt ſolida quinti loci: pyramis 189. octahedrus ac cubus 369. Icoſahedrus & Dodecahedrus 909. pro ſexto loco ſemidiameter habent 5. triangulus 10. pyramis triangula 65. quadrata 85. pentagona 105. Unde aggregatio repetita faciet pyramidem 341. Octahedrum & Cubum 671. Icoſahedrum & dodecahedrum 1661. Pro ſeptimo loco ſemidiameter habent 6. triangulus 15. pyramis triangula 111. quadrata 146. pentagona 181. ſic ex conſueto cumulo fiet pyramis 559. Octahedrus & Cubus 1105. Icoſahedrus & dodecahedrus 2743. Pro octauo loco, ſemidiameter habent 7. triangulus 21. pyramis triangula 175.

quadrata 231. pentagona 287. & factis, secundum regulam summis, pyramis erit 855. Octahedrus & cubus 1695. icosahedrus, & dodecahedrus 4215. Pro nono loco, semidiameter sortitur 8. triangulus 28. pyramis triangula 260. quadrata 344. pentagona 428. & peracta more consueto congerie, perueniet pyramis 1241. Octahedrus & cubus 2465. Icosahedrus & dodecahedrus 6137. Pro decimo demum loco, semidiameter habet 9. triangulus 36. pyramis triangula 369. quadrata 486. pentagona 609. ex quorum positione conflabũt summæ pyramidis quidẽ 1729. Octahedri & cubi 3439. Icosahedri & dodecahedri 8569. & deinceps, seruato semper pręcepto, in infinitum inuenietur cubus octahedro, & dodecahedrus icosahedro æquales. Quod sic esse, demonstratione postea roborabimus, præmissis necessarijs præambulis. Mox & alias quasdam admiratu dignas proprietates executuri, sicut profundas, ita maioribus nostris nunquam hactenus animaduersas, quæ quidem idcirco prælibata sunt à nobis ingeniose Lector, vt ea, quæ demonstraturi sumus, magis tibi peruia sint, sed & solida ipsa vsque ad decimum locum collecta hìc breui tabella commonstrabimus, vt dudumtraditum structuræ modum, exposito exemplo promtius intelligas. Eccam tabellam.

1	9	35	91	189	341	559	855	1241	1729	Pyram. cubi mixti.
1	15	65	175	369	671	105	1695	2465	3439	Octahedri cubi.
1	33	155	427	909	1661	2743	4215	6137	8569	Icosahedri dodecah.

Est etiam tertia cuborum species, quos mixtos appellare libuit: eo quod singuli fiant ex mixtione collateralis cubi primigeneris & cubi præcedentis, non aliter, quàm quadrati

centrales

centrales ex mixtione quadrati collateralis & præcedentis primi generis. Sed magis admiraberis ingeniose Lector, huiusmodi cubos mixtos esse singulos æquales singulis collateralibus tetrahedris centralibus iamdudum expositis, sicut in fine demonstrabimus. His ergo præmissis, ad ipsorum solidorum diffinitiones eveniamus.

DIFFINITIONES.

Pyramis triangula siue tetrahedrus primi generis, quæ figura, propter basium conformitatem, inter numerarias regulares solidas reponi meretur, constitit in diffinitionibus primis. Octahedrus primi generis compaginatur ex duabus quadratis pyramidibus primi generis. s. collaterali, & præcedenti: queadmodum quadratus primus cōflabatur ex duobus primi generis triangulis, collaterali scilicet & præcedenti. Cubus mixtus componitur ex duobus cubis primi generis, scilicet collaterali & præcedenti, non aliter q̄ antea quadratus centralis conflabatur ex duobus primi generis quadratis. s. collaterali & præcedenti. Nunc autem diffiniendæ sunt solidorum regularium centralium, siue secundi generis structuræ sic: Omnis radix propositi loci cum vnitate, triãgulo præcedente primi generis, pyramideque centrali collaterali, constituere potest numerum solidum, regularem sequentis loci: ita scilicet vt radix in numerum solidorum angulorum multiplicetur: triangulus in numerum laterum linearum, Pyramis in numerum basium, Tetrahedrum igitur, siue pyramidem construet, vnitas centralis, radix quadruplicata, triangulus sexcuplicatus, & pyramis triangula quadruplicata. Octahedrum autem constituet vnitas centralis, radicis secuplum, trianguli duodecuplum, & Pyramidis triangulæ octuplum. Hesahedrum siue cubum conficiet vnitas centralis, radicis octuplum, trianguli duodecuplum, & pyramidis quadratæ sexcuplum. Icosahedrum conflabit, vnitas centralis, radicis duodecuplum, trianguli trigecuplum, & pyramidis triangulæ vigecuplum: Dodecahedrum tandem conflabit, vnitas radicis vigecuplum, trianguli Trigecuplum, & pyramidis pentagonæ duodecuplum. Pyramides

enim pro cubo quadratæ: pro dodecahedro pentagonæ: pro cæteris triangulæ capiendæ sunt, quo scilicet sint corporis ipsius basibus conformes.

PROPOSITIO 87.

85 { 55 / 30

Omnis octahedrus primi generis æqualis est pyramidi quadratę centrali, sibiq́; collaterali. Exempli gratia: octahedrus quintus, primi generis est. Aio, quod is idem numerus est, & pyramis quadrata centralis quinta. Nam per 75ª & 68ª huius, pyramis quadrata quinta conficitur ex duabus pyramidibus quadratis primi generis, scilicet quinta & quarta, & per diffinitionem ipsius, de quo loquimur, octahedri, talis octahedrus quintus componitur ex ijsdem dictis duabus quadratis pyramidibus. Igitur octahedrus quintus est pyramidi quadratę quintæ ęqualis: & similiter in quo vis alio loco verificatur propositum.

PROPOSITIO 88.

per 36ª pyr. ⬠ 5ª 75. { pyr.□. 5ª 55. / pyr.△ˡᵃ 4ª 20. }
per 41ª — Pyr. 6.5ª vel Cub. 5ª 125 { pyr.□.4ª 30. }
per 51ª — pyr.△ˡᵃ 4 20.
per diffi. Octahed. 5ª 85 { pyr.□ˡᵃ 5ª 55 / pyr.□.4ª 30 }

Omnis cubus primi generis æqualis est aggregato ex octahedro primi generis collaterali, duploq́; triangulæ pyramidis præcedentis. Exempli gratia: cubus quintus, scilicet 125. æqualis est octahedro primi generis quinto. s. 85. vna cum duplo pyramidis quartæ primi generis, scilicet cum 40. Quod sic ostenditur, per 51ª huius, cubus quintus ęqualis est pyramidi hexagonæ æquiangulæ quintæ: per 41ª autē pyramis hexagona quinta ęquiangula valet aggregatum ex pyramide pentagona quinta, & ex duabus pyramidibus quarti loci. s. quadrata & triangula primi generis. Sed, per 36ª huius, pyramis pentagona 5ª æquiualet aggregato pyramidum quadratæ quintæ, & triangulæ quartę. Igitur pyramis hexagona quinta, siue cubus ipsi æqualis valebit aggregatum ex duabus pyramidibus quadratis quinta & quarta, & ex duplo pyramidis triangulæ quartæ. Cumq́; per diffinitionem duæ prædictæ pyramides quadratæ cōficiant octahedrum primi generis quintū: iam & talis octahedrus quintus cum duplo pyramidis triangulæ quartæ sumptus, adæquabit cubum quintum: quòd erat demonstrandum. & perinde sicut in quinto, ita in quouis alio loco constabit propositum.

PROPOSITIO 89.

Omnis impar in quadratum secundæ speciei, hoc est, centralem, sibi collateralem multiplicatus, producit gnomonem collateralem ex ordine gnomonum ab vnitate cōtinuatorum, atq́; quadratos ex quadratis primis in se ductis genitos per additionem

successiuam

ſucceſſiuum conſtituentium. Præmiſſa vnitate, quæ omnem numeri ſpeciem repræſentat ſecundus impar eſt 3. ſecundus autem quadratus centralis eſt 5. ex horum ducto fit 15. gnomo ſecundus quippe qui cum vnitate facit 16. quadratũ ſcilicet quaternarij. Quod ſic oſtendo: poſt vnitatem notabo primum duos in tres, in quatuor, in quinque numeros ab vnitate per duplam proportionem notatos. Hoc pacto duo primi numeri, ſcilicet 1.2. per ſextam huius ſimul conficiunt imparem ſecundi loci, ſcilicet 3. Extremi autem ſequentis ordinis ſcilicet 1.2.4. ſunt 1. & 4. proximi ſcilicet quadrati, quorum congeries, per 68ª huius, eſt quadratus centralis ſecundi loci, ſcilicet 5. Itaque demonſtrandum eſt, quòd aggregatum ex vno, & 2. multiplicatum in congeriem ex 1. & 4. producit gnomonem ſecundi loci, hoc eſt differẽtiam ipſorum 1. & 16. qui ſunt quadrati quadratorum, primus vnitatis, & alter quaternarij. Talis enim gnomo, ſcilicet 15. appoſitus vnitati, conſtituit 16. quadratum quadrati ſecundi: Nam in hiſce quatuor numerorum ordinibus, duo primi, ſcilicet 1.2. ſunt differentiæ trium ſequentiũ, ſcilicet 1. 2. 4. & rurſus hi tres ſunt differentiæ quatuor ſequentium, ſcilicet 1.2.4. & 8. & adhuc hi quatuor ſunt differentiæ quinque poſtremorum, ſcilicet 1.2. 4. 8. 16. quandoquidem in numeris continue proportionalibus differentiæ ſunt continue proportionales, & primæ differentiæ ſint iam vnitates, ſicut primi ordinum ſingulorum numeri. Hic eſt autem proceſſus demonſtrationis: aggregatum ex vno & 2. primi ordinis ductum in vnitatem, facit cõgeriem 1. & 2. in tertio ordine. Item aggregatum ex 1. & 2. primi ordinis ductum in 4. producit 4. & 8. in tertio ordine, hoc eſt, 12. Igitur tale aggregatum ex 1. & 2. hoc eſt 3. ductum in congeriem ex 1. & 4. hoc eſt, in 5. producet cumulum quatuor numerorum, ſcilicet 1. 2. 4. 8. Verùm talis cumulus facit cumulum differentiarũ quarti ordinis, ſcilicet ipſorũ 1. 2. 4. 8. 16. & perinde facit differentiam extremorum, ſcilicet 1. & 16. hoc eſt, 15. gnomonem ſecundi loci prædictum. Quod fuit demonſtrandum. Item dico quòd tertius impar, ſcilicet 5. ductus in tertium quadratum centralem. ſ. 13. producet tertiũ gnomonem ex prædictis, ſcilicet 65. qui. ſ. cum 16. coniunctus facit quadratũ nouenarij, qui tertius quadratus eſt, facit in quã 81. quadratum ex quadrato tertio in ſe dicto genitum. Quod haud obſcure, nec difficilius oſtendam Hoc proceſſu.

Pro ſecundo loco.

1
1 . 2
1 . 2 . 4
1 . 2 . 4 . 8
1 . 2 . 4 . 8 . 16

3, 5 } 15

Pro tertio loco.

1
2 . 3
4 . 6 . 9
8 . 12 . 18 . 27
16 . 24 . 36 . 54 . 81.

5, 13 } 65.

Post vnitatem notabo radices proximas secundi & tertij loci, scilicet 2. & 3. qui, per sextam huius, coniuncti faciunt tertium imparem: mox duco 2. in se, & in 3. nec non 3. in se, & fient 4. 6. 9. continue proportionales in ratione ipsorũ 2. & 3. & Rursum, ex quatuor multiplicationibus, scilicet ex ductu 2. in 4. & in 6. & ex ductu 3. in 6. & in 9. fiant quatuor numeri similiter proportionales 8. 12. 18. 27. Et adhuc ex quinque multiplicationibus, scilicet ex 2. in singulos dictos 4. 8. 12. 18. 27. & ex 3. in 27. fiant quinque numeri 16. 24. 36. 54. 81. in eadem ratione continua proportionales. Atque his constitutis, demonstrandum erit, quòd aggregatum ex 2. & 3. scilicet 5. tertius impar, multiplicatum in aggregatum ex 4. & 9. hoc est, in 13. quod, per 68[a], est tertius quadratus centralis, producit differentiam ipsorum 16. & 81. hoc est, gnomonem ex his, quales diximus tertium. Nam per 21[a] septimi Elementorum Euclid. quoniam ex ductu ipsorum 2. 3. primi ordinis, nascuntur numeri trium reliquorum ordinum, idcirco singuli ordines seruant continuam proportionem primi: & quoniam ex multiplicante in differentiam multiplicatorum, producitur differentia productorum: idcirco, duo numeri primi ordinis, scilicet 2. & 3. sunt differentię numerorum sequentis ordinis, scilicet ipsorum 4. 6. & 9. & similiter hi tres sunt differentię numerorum quarti ordinis, qui sequitur, scilicet ipsorum 8. 12. 18. 27. Nec secus hi quinque sunt differentiæ quinque numerorum sequentium, scilicet 16. 24. 36. 54. 81. quo fit, vt cumulus ipsorum 8. 12. 18. 27. sit differentia ipsorum 16. 81. extremorum. Vnde demonstrandum erit, quòd ex multiplicatione aggregati ipsorum 2. 3. in congeriem ipsorum 4. & 9. hoc est ex ductu 5. in 13. tertij, scilicet imparis in tertium quadratum centralem, producitur cumulus ipsorum 8. 12. 18. 27. hoc modo. Quoniam ex 2. in 4. fit 8. & ex 3. in 4. fit 12. per 23[a] septimi Euclidis (quoniam 2. ad 3. sicut 4. ad 16.) propterea ex 4. in aggregatum ipsorum 2. 3. fit aggregatum ipsorum 8. 12. per primam secundi Elementorum, & per eãdem rationem, quoniã ex 2. in 9. fit 18. & ex 3. in 9. fit 27. propterea ex 9. in aggregatum ipsorum 2. 3. fit aggregatum ipsorum 18. 27. Rursum ergo ex prima secundi Euclidis sequitur, vt ex aggregato ipsorum 2. 3. in aggregatum ipsorum 4. 9. fiat cumulus quatuor numerorum 8. 12. 18. 27. Quod fuit demonstrandum.

Pro quarto loco.

1
3 . 4
9. 12. 16
27 . 36. 48. 64
81 . 108 . 144 . 192 . 256

7 } 175.
25 }

Eodem

Eodem penitus processu demonstrabimus, ꝙ quartus impar. s. 7. ductus in quadratũ cẽtralem quartũ 25. efficit 175. gnomonẽ quartũ; qui cum quadrato nouenarij iunctus. s. cum 81. cõponit quadratũ ex 16. scilicet 256. Itẽ similiter, ostendemus, ꝙ quintus impar. s. 9. ductus in quintũ quadratũ cẽtralẽ. s. 41. producit 369. gnomonẽ quintũ, q cũ 256. cũstituit 625. q quadratus est 5[i] quadrati: & sic in infinitũ.

Pro quinto loco.

1
4 . 5
16. 20. 25
64. 80. 100. 125
256. 320. 400. 500. 625.

9 } 369
41

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrati primi.
1	5	13	25	41	61	85	113	145	181	Quadrati centrales.
1	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439	Gnomones,

PROPOSITIO 90.

Vnusquisque dictorum gnomonum æqualis est aggregato triãgulorum centralium ab vnitate per ordinem sumptorum, & tot, quot sunt vnitates imparis collateralis. Exempli gratia. 15. gnomo post vnitatem æqualis est aggregato trium triangulorũ centralium. s. 1. 4. 10. quoniam ternarius est impar collateralis ipsius gnomonis secundi. At 65. gnomo sequens æqualis est aggregato quinque triangulorum, scilicet 1. 4. 10. 16. 31. quoniam. s. 5. est impar. collateralis dicto gnomoni. & sic deinceps in infinitum. Et quoniam tria talia triangula, per diffinitionem componunt pyramidem triangulam centralẽ tertij loci, & quinque talia prædicta triangula constituunt pyramidem triangulam quinta loci, & sic deinceps per impares locos in infinitũ: propterea propositio pñs hoc dicit.

COROLLARIVM.

Quòd tales gnomones sunt pyramides triangulæ centrales per impares locos dispositæ in infinitum. Cuius propositionis & corollarij demonstratio hæc est. Aio, ꝙ 65. gnomo tertij loci, est pyramis triangula centralis quinta. Quod sic patet. Ducatur 5. in 31. radix. s. quinta in triangulum 31. quintũ qui basis est pyramidis ipsius quintæ, & producũtur 155. colũna. s. triãgula quinta huic addo quadratum quintũ primæ speciei. s. 25. & triangulum quintũ. s. 15. & conflãtur 195. qđ, per 79[a] huius, triplũ est pyramidis suæ quintæ, productũ aũt ex 5. in 31. cum dictis quadrato & triãgulo, sumptũ, est æquale producto ex 5. in 39. quoniam. s. 39. constat ex 31. 5. & 3. hoc est, triangulo quinto: impare tertio, & radice tertia: & ex tali radice in talem imparem, hoc est,

5 { 13 —— 65
39 —— 195

p

est ex 3. in 5. fit dictus triangulus quintus 15. (vt ex regula progressionis facile constat) Quo fit, vt productũ ex 5. in 39. æquale sit producto ex 5. in 31. in 5. & in 3. hoc est, producto ex 5. in 31. cum quadrato quinarij & triangulo quinto, hoc est, cum 25. & cum 15. Et, quoniam 31. triangulus, scilicet quintus centralis cum ipso quinario & ternario, quoniam quinarius est tertius impar, conficiunt semper triplum tertij quadrati centralium, qui nunc est. 13. & gnomo 65. fit ex 5. in ipsum 13. per pręmissam. Iam iccirco productum ipsum ex 5. in 39. scilicet 195. triplum erit gnomonis 65. fuit autem & triplum pyramidis triangulæ quintæ: Igitur gnomo tertius & pyramis centralis quinta sunt æquales. Quod erat demonstrandum. Sed restat ostendere, quòd triangulus imparis loci cum ipso impare & cum radice collaterali ad imparem faciunt simul triplum quadrati centralis, qui collateralis est ipsi radici. Hoc est assumpto exemplo, quòd 31. cum 5. & 3. faciunt triplum ipsius 13. quod sic ostendetur: Disponantur quatuor series numerorum, singulæ ab vnitate initium capientes: in quarum prima sint trianguli centralis locorum imparium, scilicet 1. 10. 31. 64. & in secunda 1. 3. 5. 7. & cæteri impares per ordinem. In tertia radices naturalis progressus 1. 2. 3. 4. &c. In postrema 1. 5. 13. 25. & cæteri quadrati centralis. In quibus id quod volumus facile constabit.

Nam cum in exordio tres vnitates sint

1	10	31	64	109	166	235	316	409	514	Triág. cẽtrales locorũ impariũ
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Radices.
1	5	13	25	41	61	85	113	145	181	Quadrati centrales.

triplum quartæ. et trium subsequẽtium tres ad primas vnitates augumenta super ipsas vnitates faciant duodenarium, qui numerus triplus est ad augumentum, quo in quarta serie sequens vnitatem excedit ipsam vnitatem; iam ideo necesse erit, vt aggregatum trium corollarium, scilicet 10. 3. 2. sit triplum ad hũc sequentem, scilicet 5. Item quoniam augumenta trium in tertio loco sequentium supra tres præcedentes conflant 24. Et augumentum reliqui in

quarta

quarta serie supra suum præcedentem est 8. Idcirco & aggregatum trium illorum, scilicet 31. 5. 3. erit & triplum dicti reliqui, scilicet 13. Et sic deinceps in infinitum, propter augmenta illic per duodenarium, hic per quaternarium crescentia semper demonstrabimus. Quod demum in dictis quatuor seriebus numeri secundum talia procedant crementa, facillimum est ostendere. In triangulis quidem si consideretur continuatorum crementa, quæ crescunt per ternarium, iam alternatorum crementa per duodenarium augebuntur. At in serie imparium quis nescit crementū fieri per binarium, & in serie radicum per vnitatem? deniq; in serie postrema quadratarum centralium, quoniam singuli constant ex binis proximis quadratis primæ speciei, quorum differentiæ crescunt per binarium, quia videlicet conflatur per additionem continuam imparium, ideo differentias sortiuntur per quaternarium crescentes. Sic nihil restat, quod ad demonstandum propositum faciet.

Δli Centrales loci impares	Dīæ Δlorum continuatorū	Dīæ Δlorum in locis impar.
+1.		
4.	3	
+10.	6	9
19.	9	
+31.	12	21
46.	15	
+64.	18	33
85.	21	
+109.	24	45
136.	27	
+166.	30	57

PROPOSITIO 91.

Tres quadrati centrales cum quatuor vnitatibus sumpti, sunt æquales quatuor triangulis centralibus cum tribus vnitatibus simul acceptis in eodem loco. Nam triangulus centralis constat ex vnitate & tribus triangulis primę speciei pręcedentis loci. Quadratus verò centralis constat ex quatuor triangulis primę speciei præcedentis loci, & ex vnitate. Quam ob rem, quatuor trianguli centrales constabunt ex 12. triangulis primæ, & ex quatuor vnitatibus Tres verò quadrati centralis constabunt ex 12. triangulis primæ, & ex tribus vnitatibus. Igitur, si apponantur hic quatuor, illic tres vnitates, constabit veritas propositi.

PROPOSITIO 92.

Tres pyramides quadratæ centrales cum quatuor axibus sumptæ, sunt æquales quatuor pyramidibus triangulis centralibus cū tribus axibus in eodem loco simul acceptis. Hæc constat ex præcedenti: quoniam pyramides constant ex basibus, illæ quadratis, hæ triangulis, & axes constant ex totidem vnitatibus singulæ. Quare cùm ex aggregatione æqualium coaceruentur æqualia, constat propositum.

Tres

PROPOSITIO 93.

Tres Pentagoni centrales cum quinque vnitatibus simul sumpti sunt æquales quinque triangulis centralibus cum tribus vnitatibus simul acceptis in eodem loco. Quoniã triãgulus centralis constat ex vnitate & ex tribus triangulis primis præcedentibus. Pentagonus autem centralis constat ex quinque triãgulis primis præcedentibus ex vnitate: quam ob rem quinque trianguli centrales constabunt ex 15. triangulis primis, & ex 5. vnitatibus. Tres vero pentagoni constabunt etiam ex 15. triangulis primis, & ex tribus vnitatibus: Igitur si apponantur hic 5. illic tres vnitates, constat propositum.

PROPOSITIO 94

Tres pentagonæ pyramides centrales cum quinque axibus sunt æquales quinq; pyramidibus triangulis centralibus cum tribus axibus eiusdem loci pariter acceptis. Hæc sequitur ex præmissa: quoniã pyramides constant ex planis, illæ pẽtagonis, hæ triãgulis, & axes constant ex totidem vnitatibus singulæ. Igitur cũ ex aggregatione æqualium coaceruẽtur æqualia, verum est id, quod ostendendum proponitur.

PROPOSITIO 95.

Cubus: Vnitas; 8. semid. χ; 12. Δ^li +; 6. pyr □^æ χ

Omnis cubus centralis æqualis est octahedro centrali sibi collaterali. Nam talis cubus, per diffinitionem construitur ex vnitate, quod est centrum: ex octo semidiametris, ex 12. triangulis primis: quoniam tot sunt latera linearia solidi: & ex sex pyramidibus quadratis centralibus quot, scilicet sunt bases solidi. Octahedrus autem conflatur ex vnitate centrali, ex senis semidiametris, ex 12. triangulis primis: quoniam tot sunt eius solidi latera, & ex octo pyramidibus triangulis centralibus, propter totidem bases. Sed cum per 92^a p̃missam, tres pyramides quadratæ cum quatuor axibus, qui sunt æquales semidiametris singulæ singulis, sint æquales quatuor pyramidibus triangulis cum tribus axibus: Iam sex pyramides quadratæ cum octo semidiametris erunt æquales octo pyramidibus triangulis cum sex semidiametris. At vnitas & 12. trianguli eãdem vtrobique summã ingerunt. Ergo & totus solidus numerus toti solido numero, scilicet cubus Octahedro adæquabitur: quemadmodum proponitur.

Octahedrus: Vnitas; 6. semid. χ; 12. Δ^li +; 8. Pyr. Δ^æ χ

PROPOSITIO 96.

Omnis Dodecahedrus numerus æqualis est Icosahedro numero sibi collaterali. Sicut præmissa, per nonagesimã secundam

ita

ita pñs propositio per 64ª demonstrabitur. Nãque, per suppositionem nostram, icosahedrus conficitur ex vnitate, quod est centrum: ex 12. semidiametris, ex 30. triangulis primis, secundum laterum numerum solidi: & ex 20. pyramidibus triangulis centralibus, iuxta numerum basium. Dodecahedrus autem numerus formabatur item ex vnitate centrali, ex viginti semidiametris, ex triginta triangulis primis, propter totidem latera, & ex 12. pyramidibus pentagonis centralibus, quot sunt solidi bases. Sed cum per 94^a præmissam, tres pentagonæ pyramides cum quinque axibus, siue semidiametris sunt æquales quinq; pyramidibus triangulis cum tribus axibus, siue semidiametris: iam & 12. Pentagonæ Pyramides cum 20. semidiametris simul, æquales erunt 20. pyramidibus triangulis cum 12. semidiametris. Atque vnitas & triginta trianguli tantundem vtrobique accumulant. Igitur ex totus icosahedrus toti dodecahedro æqualis erit, sicut in propositione concluditur.

Icosahedrus: Vnitas |; 12. semid. χ; 30. Δ^li +; 20. pyr. Δ^lae χ

Dodecahedrus.: Vnitas |; 20. semid. χ; 30. Δ^li +; 12. pyr. ⬠^nae χ

Propositio 97^a.

Vnitas, quatuor diametri, hoc est, par numerus, quẽ voco diametrum, quadruplicatus cum octuplo trianguli primi, vno retrò intermisso accepti, componunt quadratum imparis collateralis. Disponantur quatuor numerorum series ab vnitate, scilicet trianguli primi, pares, impares & imparium quadrati per ordinem. Et in ordine parium capiatur quilibet par, vtputa 8. ex triangulis autem capiatur, vno intermisso præcedens, scilicet 6. octuplicatus, hoc est, 48. Aio igitur, quòd vnitas, quadruplum ipsius 8. scilicet 32. simul cum 48. conficiunt quadratũ collateralis imparis, scilicet 81. Nam per 54ª huius, vnitas cum 48. quod est octuplum trianguli 6. facit quadratum imparis sequentis, scilicet 49. qui quadratus est ipsius 7. per 60ª verò huius, ipse numerus par 8. quadruplicatus, scilicet 32. coniunctus cum quadrato imparis præcedentis, scilicet cum 49. efficit quadratum collateralis imparis, scilicet 81. Igitur vnitas cum 32. & 48. conflant quadratum collateralis imparis prædicti, similiter in cæteris horum quatuor ordinum numeris per eadem penitus argumentando procedens, sicut demonstrandum proponitur.

1, 48 } 49; 49, 32 } 81

1	3	6	10	15	21	2	36	45	55	Trianguli primi.
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	Pares
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares
1	9	25	49	81	121	169	225	289	361	Quadrati impariū.

PROPOSITIO 98ª.

Quadruplum dicti trianguli, vno intermiſſo præcedentis imparem, cum ſexcuplo pyramidis quadratæ centralis immediatè dictum imparem præcedentis coniunctum, conficit duo ſupplementa, quæ ſingula fiunt ex ductu ipſius imparis in latus ſecundi quadrati præcedentis: & coniuncta cum quadrato ipſius imparis conſtituunt gnomonem: qui coniunctus cum ſecundo quadrato prædicto, conſtruit ſecundum quadratum ſequentem, hoc eſt, ipſius imparis collateralem. Intelligo ſecundos quadratos eos, qui ex primis in ſe ductis fiunt: vt 16. eſt ſecundus quadrat⁹ binarij 81. ſecūdus quadratus ternarij; & ſic deinceps. Itaque exponam primum, dein oſtendam propoſitionem. Exponatur ab vnitate ſex numerorū ſeries, ſcilicet, radices, Impares Trianguli primi, Pyramides quadratæ cētrales, quadrati primi, & gnomones ſecundorum quadratorum, per ordinem continuati. Quibus exaratis, iam in ſecundo loco, impar eſt 3. hic autem quadruplum triāguli nullum eſt. Nam retro intermiſſa vnitate, nullus eſt triangulus. pyramis hunc locum pręcedēs, eſt vnitas eius, ſexcuplus eſt ſenarius: qui ſolus facit hìc duo ſupplementa 3. & 3. quæ ſingula fiūt ex impare huius loci, ſcilicet ex 3. in latus ſecundi quadrati præcedentis, ſcilicet vnitatis, hoc eſt, in vnitatem. Et coniuncta cum quadrato dicti imparis, ſcilicet cum nouem, conficiunt 15. gnomonem, ſcilicet eiuſdem loci: qui applicatus ſecundo quadrato prædicto, ſcilicet vnitati, cōſtruit iam ſecundum quadratum ſequentem, ſcilicet 16. In tertio autem loco, impar eſt 5. quadruplum trianguli, vno retro intermiſſo, ſumpti, ſcilicet vnitatis, eſt quatuor. Pyramis præcedens eſt 6. cuius ſexcuplum 36. qđ cum 4. facit 40. quæ ſunt duo ſupplementa, ſcilicet 20. & 20. quæ ſingula fiunt ex impare dicto, ſcilicet 5. in 4. latus ſecundi quadrati præcedentis, qui eſt 16. & coniuncta cum quadrato dicti imparis, ſcilicet cum 25. faciunt 65. gnomonem tertium: qui cōiunctus cū ſecundo quadrato prædicto, ſcilicet 16. conflat iam ſecudum quadratum ſequētem, ſcilicet 81. In quarto deinde

loco,

loco, impar est 7. quadruplum trianguli vno retro intermisso, sumpti, scilicet ternarij, est 12. Pyramis præcedens est 19. cuius sexcuplum 114. quod cum 12. facit 126. quæ sunt duo supplemẽta, scilicet 63.& 63. quæ singula fiũt ex impare dicto 7. in 9. latus, scilicet secundi quadrati præcedentis, qui fuit 81. & coniuncta cum quadrato dictæ imparis, scilicet 49. faciunt 175. gnomonem quartum, qui coniunctus secundo quadrato prædicto, scilicet 81. facit 256. secundum quadratum sequentem. Adhuc in quinto loco, impar numerus est 9. quadruplum trianguli non immediatè præcedentis, scilicet 6. est 24. pyramis præcedens 44. cuius sexcuplum 264. quod cum 24. efficit 288. quæ sunt duo supplementa, scilicet 144.& 144. quæ singula fiunt ex Impare dicto, scilicet 9. in 16. latus scilicet, quadrati secundi præmissi, qui fuit 256.& coniuncta cum quadrato dicti imparis, scilicet cum 81. faciunt 369. gnomonem iungendum secundo quadrato prædicto, scilicet 265. Vt cõflet 625. quadratum secundum quinarij: qui sequitur, positus in præsenti loco. Sic pro sexto, septimo, & sequentibus locis in infinitum fit similiter seriatim procreando, secundos radicum quadratos. Sed demonstrandum, quo pacto in singulis locis quadruplum trianguli, ex tertio retrorsum loco sumpti, cum sexcuplo pyramidis quadratæ præcedentis coniunctum, facit dicta duo suplementa, siue (quod idem est) quòd duplum talis trianguli cum triplo talis pyramidis coniunctum, facit vnum tale supplementum, quòd (vt dictum est) fit ex impare ipsius loci in latus secundi quadrati præcedentis: & proinde duo talia supplementa coniuncta cum quadrato dicti imparis, componunt gnomonẽ, qui iunctus cũ secundo quadrato prædicto conficit sm. quadratum sequentem, impariq; collateralẽ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Radices
1	3	5	7	9	11	13	15	17	17	Impares
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	Trianguli primi
1	6	19	44	85	146	231	344	489	670	Pyr.quadr.centrales
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrati primi.
1	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439	Gnomones 2[i]

Verùm in primo poſt vnitatem loco, qui ſecundus appellatur, in quo(vt dixi) quadratum triangulæ nullum eſt, liquet quòd triplum pyramidis præcedentis, ſcilicet 3. facit tale ſupplementum, quod ſcilicet fit ex impare huius loci, qui ternarius eſt, in latus ſecundi quadrati præcedentis, ſcilicet in vnitatem: & idcirco per quartam ſecundi Euclidis, duo huiuſmodi ſupplementa coniuncta cum quadrato dicti imparis, ſcilicet 9. conficiunt 15. gnomonem, ſcilicet eiuſdem loci: qui appoſitus ſecundo quadrato prædicto, ſcilicet vnitati, conſtruit ſecundum quadratum ſequentem, ſcilicet 16. collateralem ipſius imparis: cuius quidem latus eſt quadratus ipſe primus, ſcilicet 4 quoniam tale latus ex aggregatione conſtat vnitatis & ſequentis imparis, per 15ª huius libri. In tertio loco id ipſum quoque oſtendemus: in quo impar eſt 5. quadruplum trianguli 4. & pyramidis ſexcuplum 36. & ideo trianguli duplum 2. pyramidis triplum 18. Quare hic oſtendendum eſt, quòd 2. cum 18. faciunt 20 ſupplementum quod fit ex impare huius loci ſcilicet 5. in latus ſecundi quadrati præcedentis, hoc eſt in 4 quod ſic patet: Nam columna quadrata centralis præcedentis loci, ſcilicet 10. cum duplo quadrati primi eiuſdem loci, ſcilicet cũ 8. per 80ª huius, efficit triplum pyramidis eiuſdem loci, quę quæ fuit 6. hoc eſt 18. Cui numero addo 2. parte altera longiorem eiuſdem loci, & fiunt 20. Cumque 10. columna dicta fiat ex radice eiuſdem loci, ſcilicet 2. in quadratum centralem collateralem, ſcilicet in 5. atq; ipſe 5. conſtet ex quadrato primo collaterali & præcedenti, hoc eſt, ex 4. & 1. iam ipſe 10. fit ex 2. in 4. & ex 2. in 1. coniunctus cum 2. parte altera longiore, hoc eſt totus 4. fiet ex 2. in 2. quod eſt aggregatum ex 1. & 1. Sic habemus tria producta, ſcilicet 8. ex 2. in 4. quod fuit duplum quadrati cum columna coniunctum. Item 8. & ex 2. in 4. atque 4. ex 2. in 2. integrãtiam totum numerum 20. cumque ex toto numero 20. ipſe octonarius contineat bis 4. & rurſum 8. bis 4. demonſtrandum eſt quod reliquum, ſcilicet 4. contineat ſemel ipſum 4. vt totus 20. contineat quinquies, ſcilicet ſecundum numerum imparem huius locum, ipſum quatuor. Quod iam ratione comprobatur: quoniam ſcilicet 4. fit ex radice ſecundi loci; hoc eſt, ex 2. in parte altera longiore eiuſdem loci, ſcilicet in 2. Et perinde factus adequatur quadrato collaterali, ſcilicet 4. ſicut & radix æqualis eſt ipſi parte altera longiori· Producitur

2 — 5 — 10

2 { 4 — 8 / 1 — 2 / 1 — 2 }

2 — 4 — 8

citur itaque in hoc loco 20. supplementum ex 5. in 4. & perinde duo talia supplementa, scilicet 20. & 20. coniuncta cum 25. quod est quadratum ipsius 5. imparis, faciunt gnomonem 65. qui coniunctus cum quadrato ipsius 4. scilicet cum 16. quadrato secundo præcedentis loci, scilicet secundi, constituit sequentem quadratum secundum, collateralem, scilicet huic loco tertio, qui est 81. Nam per 4ª secundi Euclidis, supplementa duo ex lateribus quadratorum duorum producta, vnà cum ipsis quadratis componunt quadratum, cuius latus constat ex lateribus quadratorum componentium. Sed vnum laterum talium fuit quadratus numerus, scilicet 4. & alterũ fuit sequens impar, scilicet 5. Ergo & compositus ex illis, per 15ª huius libri, erit quadratus sequens, scilicet 9. latus scilicet totalis quadrati: & perinde totalis quadratus erit quadratus secundus ternarij, scilicet 81. qui ex 9. in se fit. In quarto etiam loco nunc demonstrationem repetemus: in quo impar est 7. quadruplũ trianguli est 12. sexcuplum pyramidis 114. & ideò trianguli 6. triplum pyramidis 57. Quare hic ostendendum est, quòd 6. cum 57. efficit 63. supplementum, quod fit ex impare huius loci, scilicet 7. in latus secundi quadrati præcedẽtis, hoc est in 9. quod sic patet. Nam columna quadrata centralis præcedẽtis loci, scilicet 39. cum duplo quadrati primi eiusdem loci, scilicet cum 18. efficit, per 80ª huius triplum pyramidis eiusdem loci, hoc est 57. Cui numero adijcio 6. parte altera longiorem eiusdem loci: & fiunt 63. Cumque 39. columna dicta fiet ex radice eiusdem loci, scilicet 3. in quadratum centralem collateralem, scilicet in 13. atque ipse 13. constet ex duobus quadratis primis, scilicet, collaterali, & præcedenti, hoc est, ex 9. & 4. iam ipse 39. fiet ex 3. in 4. & ex 3. in 9. At ipse 6. parte altera longior, fit ex 3. in 2. Ergo 12. qui fit ex 3. in 4. coniunctus cum 6. parte altera longiore, scilicet 18. fiet ex 3. in 6. quod est aggregatum ex 4. & 2. Sic habemus tria producta, scilicet 18. ex 2. in 9. quod fuit duplum quadrati cum columna coniunctum. Item 27. ex 3. in 9. Atque 18. ex 3. in 6. integrantia totum 63. Cumque ex toto numero 63. ipse 18. contineat bis 9. & ipse 27. contineat ter 9. demonstrandum est, quòd residuum scilicet 18. continet bis 9. vt videlicet totus 63. concludatur continere septies ipsum 9. secundũ imparem. s. huius loci, qui septenarius est. Quod & ratione confirmatur.

3 — 13 —— 39

3 — { 9 —— 27 ; 4 —— 12 ; 2 —— 6 }

2 — 9 —— 18

Quoniā 18. producitur ex radice tertij loci.s.3. in 6. parte altera longiorē eiusdem loci: & perinde productus duplus est ad quadratū eiusdem loci, scilicet ad 9. quotuplus est parte altera longior ipsius radicis. Producitur itaque in hoc loco supplementū 63. ex 7. in 6. Et perinde duo talia supplemēta 63. & 63. coniuncta cum 49. quadrato ipsius imparis, faciūt gnomonem 175. Qui coniunctus cum quadrato ipsius 9.s. cum 81. quadrato secundo præcedētis loci.s. tertij, cōponūt quadratum secundum sequentem.s. 256. collateralem, hoc est, huius quarti loci. Nam, per 4ª secundi Euclid. duo quadrata & duo supplementa ex lateribus quadratorum producta pariter accepta, cōficiunt quadratum totalem: cuius latus est aggregatum ex lateribus quadratorum partialium. Cumque vnum horum laterum fuerit iam quadratus numerus, scilicet 9. & reliquum impar numerus sequens.s.7. iam aggregatum ex ipsis, totalis scilicet quadrati latus erit, per 15ª huius, erit quadratus sequens, scilicet 16. latus, scilicet totalis quadrati. Vnde totalis quadratus erit quadratus secundus, scilicet 256. qui fit ex 16. in se. Lubet & in quinto loco demum propositum demonstrare. In quo quidem impar est 9. quadruplum trianguli sæpe dicti 24. sexcuplum pyramidis 264. & ideo duplum trianguli 12. triplum pyramidis 132. Quare hic ostendendum, quòd 12. cum 132. efficit 144. supplementum, quod fit ex impare huius loci, scilicet 9. in latus secundi quadrati præcedentis, scilicet in 16. Quod sic potest concludi: Nam per 80. huius columna quadrata centralis præcedentis loci, scilicet 100. cum duplo quadrati primi eiusdem loci, scilicet cum 32. efficit triplū pyramidis suæ eiusdē loci, quæ fuit 44. hoc est 132. cui numero addo ipsum 12. parte altera longiorem, & conficio 144. cumque 100. columna prædicta fiat ex radice eiusdem loci, scilicet 4. in quadratum centralem collateralem, scilicet in 25. atq; ipse 25. constet ex duobus quadratis primis, scilicet collaterali & præcedenti, hoc est, ex 16. & 9. iam ipse 100. fiet ex 4. in 16. & ex 4. in 9. At ipse 12. parte altera longior fit ex 4. in 3. Ergo 36. qui fit ex 4. in 9. coniunctus cum 12. scilicet totus 48. fiet ex 4. in 12. quod est aggregatum ex 9. & 3. Sic habemus tria producta: scilicet 32. ex 2. in 16. quod fuit duplum quadrati cum columna coniunctum: 64. ex 4. in 16. atque 48. ex 4. in 12. integrantia totum 144. Cumque ex toto numero 144. ipse 32. cōtineat bis 16. & ipse 64. quater

4 — 25 — 100.
4 { 16 — 64. / 9 — 36. / 3 — 12. }
2 — 6 — 32.

loc⁹ 2⁹ { 2 — bis / 1 — semel / 0 — nihil } ter — 1.
— 3
3⁹ { 8 — bis / 8 — bis / 4 — semel } qnqes — 4
— 20
4⁹ { 18 — bis / 27 — ter / 18 — bis } septies — 9
— 63

16. demonſtrandum reſtat, quòd reſiduum ſcilicet 48. contineat ter 16. vt ſcilicet totus 144. comprehēdat nouies 16. iuxta imparem huius loci, ſcilicet 9. quod ſicut prius, facilè oſtenditur. Quoniam 48, producitur ex radice quarti loci, ſcilicet 4. in 12. parte altera longiorem eiuſdem loci. Et idcirco productus eſt triplus ad quadratum collateralem, ſcilicet ad 16. quotuplus eſt parte altera longior ipſius radicis. Producitur itaque in hoc loco ſupplementum 144. ex 9. in 16. & ideo duo talia ſupplementa, ſcilicet 144. & 144. coniuncta cum 81. quadrato ipſius imparis 9. faciunt gnomonem 369. qui coniunctus cum quadrato ipſius 16. ſcilicet cum 256. quadrato ſecundo præcedentis loci, ſcilicet quarti, componit ſequentem quadratum ſecundum, ſcilicet 625. huius quinti loci. Nam per quartam ſecundi Euclidis, duo quadrata, & duo ſupplementa ex lateribus quadratorum producta pariter accepta, conficiunt quadratum totalem: cuius latus eſt aggregatum ex lateribus quadratorū partialium. Cumque vnum horum laterum fuerit quadratus numerus, ſcilicet 16. & reliquum impar numerus ſequens, ſcilicet 9. iam per 15ª huius aggregatus ex ipſis, totalis ſcilicet quadrati latus, erit numerus quadratus, ſcilicet 25. Vnde totale quadratum erit quadratus ſecundus, ſcilicet 625. qui fit ex 25. quadrato huius quinti loci in ſe multiplicato. Similiter in ſexto, ſeptimo, octauo, & cæteris deinceps locos in infinitum continuabitur hęc demonſtratio. Namque in ſexto loco argues tria producta integrantia ſupplementum, continere præcedentem quadratum vndecies. In ſeptimo loco tredecies, in octauo quindecies, in nono ſeptemdecies, in decimo vndeuigeſies. & ſic deinceps per impares ſequentes: vt hic in margine notaui, quo conſtet propoſitum.

5° 32—bis, 64—q̃ter, 48—ter } nouies—16
—144

6° 50--bis, 125--qnqes, 100--quater } vndecies-25
—275

7° 72--bis, 216--ſexies, 180--qnqies } tredecies-36
—468

8° 98--bis, 343--ſepties, 294--ſexies } qndecies-46
—735

9° 128--bis, 512--octies, 448--ſepties } 17ties-64
—1088

10° 162--bis, 729--nouies, 648--octies } 19ties-81
—1539

11° 200--bis, 1000--decies, 900--nouies } 21ties-100
—2100

Et ſic deinceps in infinitum. Et productum medium ſemper eſt Cubus pręcedentis loci.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Radices.
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	Trianguli primi
1	6	19	44	85	146	231	344	489	670	Pyramides quadrati centrales
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrati primi
1	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439	Gnomones.

PROPOSITIO 99ª.

□. imp. { Vnitatem / 8. semid. / 8. △loi

Gnomo 2°

duo suppl. { 4. △loi / 6. pyr. □.

Cubus centra. { vnitatē. / { 8. sem. / 12. △loi } / 6. pyr. □.

Gnomones prædicti, sicut dictum est inuenti, Cubi sunt & Octahedri centrales. Nam cum vnusquisq; talium gnomonū constet ex duobus supplemētis & ex quadrato imparis, atq; per præmissam talia suppleméta cōflent ex quadruplo tertij retrorsum sumpti trianguli primi, & ex sexcuplo pyramidis quadratæ centralis præcedētis: Itemque, cum, per ante præmissam, quadratus dicti imparis constet ex aggregatione vnitatis, quatuor diametrorum, siue octo semidiametrorum & ex octuplo dicti trianguli; idcirco sequitur, vt talis gnomo construatur ex aggregatione vnitatis, octo semidiametrorū, duodecim taliū triangulorū, & sex pyramidū dictarum. Verùm, per diffinitionē cubi centralis, ipse cubus ex taliū quatuor numerorū cumulo cōpaginatur, ex quib⁹ talis gnomo. Igitur gnomo existet cubo æqualis. Per 95ª verò præmissam, cubus octahedro æqualis esse constitit: igitur & octahedrus gnomoni æqualis erit, sicut demonstrandum proponitur.

COROLLARIVM.

Et quoniam per 90ᵉ corollarium ostēsum fuit, quòd gnomones præfati sunt pyramides triangulæ centrales impari locorum, idcirco sequitur, vt gnomones, cubi, octahedri cētrales, & pyramides triangulę centrales imparium locorum ordinatim collati, sint ijdem numeri.

PROLOGOMENA.

Restat adhuc nobis ostendendum, quòd sicut contingit cubos primi generis fieri ex congerie vnius, duorum, trium, & deinceps imparium per ordinem ab vnitate succedentium singulos ab vnitate continuatos in infinitum; ita & cubis centralibus similem dignitatem esse à natura tributam: vt scilicet ipsi cubi centrales ab vnitate seriatim dispositi singuli constituantur ex aggregato vnius, trium, quinque, septem, & deinceps imparium successiue sumptorum ab vnitate imparium numerorum, semperq; sub multitudine imparium per ordinem accepto. Demonstrabimus autem hoc, præmissis aliquod necessarijs præambulis.

PROPOSITIO 100ª.

Si fuerint tres, quinque, septem, vel sub alterius cuiuslibet imparis multitudine sumpti numeri æquali excessu & successiuè crescentes; eorum aggregatum æquum erit ei numero, qui ex ductu medij in multitudinem multiplicati procreabitur.

Exempli

Exempli gratia, ſint tres numeri 3. 5. 7. Aio, quòd 5. qui eſt medius ductus in ternarium (quandoquidem tres ſunt numeri) efficit aggregatum ipſorum 3. 5. 7. Ad ſocientur enim ipſis 3.5.7. per binarium creſcentibus totidem 7.5.3. & ijdem, ſed ordine præpoſtero, decreſcentes: Sic fiet, vt decrementum vnius ordinis reſarciatur pari cremento alteri⁹: & duo medij, ſcilicet 5.& 5. ſint inuicem ęquales; & ſimul iuncti ſint ęquales aggregato reliquarum combinationum Quo fit, vt congeries amborum ordinum ſit planus numerus ſiue ſuperficialis tetragonus, qui fit ex ductu ternarij in aggregatum ipſorum 5.& 5. ſeu quorumlibet binorum: Igitur & congeries vnius ordinis (quæ dimidia eſt totalis cumuli) fiet ex ductu quinarij in ternarium: ſicut proponitur. Similiter, ſi ſummant quinq; numeri: vtpote 9.11.13.15.17. eadem acceſſione creſcentes. Aio ſimiliter, quòd medius eorum, ſcilicet 13. in quinarium (quoniam quinque ſunt numeri) multiplicatus producit talium quinque numerorum aggregatum. Nam ſi talibus numeris compares & ſub ordine præpoſtero applicentur, ſimiliter, & in quouis alio caſu, conſtabit propoſitum.

3	7
5	5
7	3
5, 5	15
9	17
11	15
13	13
15	11
17	9
5, 13	65

PROPOSITIO 101ª.

Si ex radicibus ab vnitate, & ſecũdùm vnitatis acceſſum creſcentibus quotlibet ſegregentur vnitas & deinde ex ſequentibus tres, Inde quinque, & deinceps per multitudinem imparium ſequentium per ordinem; iam vnitas, tertius triũ, quintus ſequẽtiũ quinque & deinceps poſtremus ſemper reliquarum multudinum quadratus numerus eſt. Quòd enim vnitas quadratus ſit, patet. Quòd autem tertius ſequentium ſit quadratus, concluditur, quoniam addit tres vnitates, hoc eſt, ſequentem imparem vnitati: & perindo, per 15ª huius, aggregatum, hoc eſt, ipſe tertius dictus, eſt ſequens ab vnitate quadratus. Item quinque ſequentes per vnitatem ſingulæ creſcentes faciunt, vt quintus eorum excedat ſupradictum tertium quinque vnitatibus, hoc eſt, ipſo 5. impari tertio: vnde per 15. huius, aggregatum, hoc eſt, ipſe quintus prædictus erit tertius quadratus. Adhuc ſeptem ſuccedentes numeri cum totidem vnitates, hoc eſt, 7. quartum imparem addant, iam ſimiliter aggregatum, hoc eſt, ſeptimus huius multitudinis, erit quadratus quartus per dictam 15ª & ſic in infinitum, ſicut demonſtrandum proponitur.

1	
2, 3, 4	3
5, 6, 7, 8, 9	5
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16	7

1 — 1
3, 5, 7 — 16
9, 11, 13, 15, 17 — 81
19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 — 256
33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49 — 625

1 — 1
3, 5, 7 — 15
9, 11, 13, 15, 17 — 65
19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 — 175
33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49 — 369

COROLLARIVM

Manifestum est ergo, quòd in eadem dispositione numerorum, primus, quartus, nonus, sedecimus, & cæteri segregatarum multitudinum secundum impares numeros, postremi sunt ipsi radicũ ab vnitate sumptarũ p ordinẽ quadrati.

PROPOSITIO 102ª.

Si ex numeris ab vnitate continuatim dispositis imparibus in infinitum, segregetur vnitas, & ex sequentibus tres, & inde quinque, & deinceps aliæ multitudines semper secundum impares succeßiuè numeros: tunc si vnitas, & dictæ sequẽtes multitudines singillatim coaceruentur: Vnitas & aggregata ipsa singula erunt quadrati quadratorum à radicibus per ordinem ab vnitate dispositis in se multiplicetis factorum: Hos quadratos quadratorum nuper quadratos secundos appellauimus. Quod igitur vnitas primus imparium sit quadratus quadrati vnitatis, constat per se: quandoquidem vnitas in se ducta semel atque iterum semper vnitatem producit. Quod autem tres sequentes cum vnitate coniuncti conficiunt quadratum, constat per 15ª huius: & quoniam vnitas & tres sequentes impares per quatuor aggregationes cõficiunt totidem quadratos: iam idcirco vltima eorum congeries erit quartus quadratus, hoc est, quadratus quartæ radicis. Sed per præcedentem, eiusque corollarium, quarta radix numerus quadratus est: igitur talis congeries est quadratus quadrati quarti, hoc est, quadratus secundus binarij. Similiter ostendemus, quòd quinque sequẽtes impares ad talem quadratum secundum appositi, efficiẽt quadratum nonę radicis: sed nona radix, per præmissam & suum corollarium, tertius quadratus erat: igitur talis cumulus erit quadratus secundus sequens, hoc est, quadratus nouenarij, scilicet quadratus secundus ternarij. Non aliter, si tali quadrato secundo applicentur septẽ impares sequentes, conflabunt quadratum sedecimæ radicis per 15ª. Cumq; radix sedecima, per præmissam & suum corollarium, sit quadratus quartus. Iam tale conflatum erit quadratus secundus sequens, hoc est, quartæ radicis, siue quadratus quarti quadrati, hoc est, sedenarij. Adhuc si huic quadrato secundo accumulentur nouem impares sequentes, constituetur quadratus secundus sequens, hoc est quintæ radicis, siue quadratus ex 25. in se multiplicato factus. & sic in infinitum. Quod demonstrandum proponitur.

PROPOSITIO 103ª.

Iisdem suppositis demonstrandum est, quòd vnitas, aggregata trium sequentium imparium, quinque sequentium imparium: itemque septem, nouem, & cæterarum sub imparibus per ordinem sequentium multitudinum, singula sunt gnomones, ex quorum continua ad monadem adiectione constituuntur seriatim ipsi, de quibus loquimur, quadrati quadratorum. Nam, cum per præcedentem, huiusmodi aggregata monadi successiue adiecta conficiant per ordinem ipsos quadratos quadratorum: sequitur, vt ipsa singula aggregata sint gnomones, qui ad monadem continuatim adiecti constituunt tales quadratorum quadratos, sicut propositio concludit.

PROPOSITIO 104ª.

Iisdem adhuc suppositis demonstrandum est, quòd in talibus aggregatis singulis, ipsius imparium multitudinis medij sunt per ordinem ab vnitate sumpti quadrati centrales. Nam tales medij post vnitatem impares sunt 5.13.25.41.& cęteri. Dico igitur, ꝙ hi sunt quadrati centrales. Nam per propositionem 100ª præmissam, ex ternario primę multitudinis in medium imparem, scilicet 5. fit aggregatum numerorum ipsius multitudinis. sed per præcedentem, tale aggregatum est gnomon. Similiter in quinario secundæ multitudinis 5. in 13. facit aggregatum totius multitudinis, per 100ª & per præmissam, tale aggregatum est gnomon sequens. Item in septenario sequentis multitudinis 7. in 25. medium producit aggregatum ipsi⁹ multitudinis per 100ª hoc est, gnomonem sequentem per præmissam. Adhuc in nouenario sequentis multitudinis 9. in 41. medium producit congeriem ipsius multitudinis per 100ª, hoc est, gnomonem qui sequitur, per præmissam: & sic deinceps in infinitum. Verùm, per 89ª huius, tales impares per ordinē multiplicati in quadratos centrales sibi collaterales producunt gnomones eosdem, qui scilicet quadratos quadratorum cōstituunt. Necesse est ergo, vt tales medij multitudinum singularum impares sint quadrati centrales: quemadmodum proponitur.

COROLLARIVM.

Qui quidem Gnomones sunt cubi & octahedri centrales, & pyramides triangulæ centrales locorum imparium, vt in 99ª eiusque Corollario fuit conclusum.

PROPOSITIO 105ª.

Omnis cubus, ſiue octahedrus centralis cum impari collaterali coniunctus, æquiualet duplo tetrahedri centralis. Cum enim numerus baſium octahedri ad numerum baſium tetrahedri ſit duplus: itemque numerus laterum illius ad numerum laterum huius duplus. iam impar appoſitus facit, vt vnitas centralis cum ſemidiametris octahedris ſint (additione facta) duplum vnitatis centralis & ſemidiametrorum tetrahedri. Sunt enim ſemidiametri octahedri ſex, & ſemidiametri tetrahedri quatuor. Et idcirco oportet adijcere ad ſummam octahedri duas ſemidiametros, hoc eſt, parem collateralem, & vnitatem, ad duplicandam vnitatem centralem: quæ cum pari facit imparem collateralem. Conſtat igitur propoſitum.

PROPOSITIO 106ª.

Ex aggregato duarum proximarum radicum in aggregatum quadratorum ex eis multiplicato, producitur numerus qui cum ipſo radicum aggregato coniunctus facit duplum aggregati cuborum earundem. Exempli gratia 2.& 3.ſunt duæ proximæ radices, quarum congeries 5.quadrati autem 4.& 9. cubi vero 8. 27.quadratorum cumulus 13.cuborum verò 35.Dico igitur, quòd id, quod fit ex 5. in 13.ſcilicet 65.coniunctum cum 5. facit duplum ipſius 35. Exponatur vnitas cum radicibus 2.& 3.& quadrati 4.& 9. cum medio proportionali 6. Itemque cubi octo & 27. cum duobus medijs proportionalibus 12.& 18. in quibus propter proportionem numerorum, quoniam ex 2.in 4.fit 8. & ex 3.in 4.fit 12.idcirco ex aggregato 2.& 3.in 4. fit aggregatum ipſorum 8.ex 12. Non aliter oſtendam quòd ex dicto 2. & 3. aggregato in 9. fit ipſorum 18. & 27. aggregatum, ſicut in 89ª demonſtrauimus. Vnde ex aggregato ipſorum 2. & 3. in aggregato ipſorum 4. & 9. hoc eſt, ex 5. in 13. fiet aggregatum ipſorum quatuor numerorum 8. 12. 18. 27. Demonſtrandum eſt igitur, quòd aggregatum talium quatuor numerorum. cum aggregato radicum, ſcilicet cum 5. facit duplum aggregati ipſorum 8.& 27.hoc eſt, quod 65. cũ 5. eſt duplũ ipſius 35. ſiue qđ aggregatũ ipſorum 18.& 12.cũ 5.coniunctum, eſt ęquale aggregato ipſoꝝ 8.& 27. Quod facile demõſtratur: Nã 12.ſuperat 8.in 4. At ipſe 18.ſuperatur à 27.in 9.Tanto igitur aggregatum ipſoꝝ 18.& 12.ſuperatur ab aggregato ipſorum 8.& 27.quanto 9.maior eſt quàm 4.Sed 9.

1
2 . 3
4 . 6 . 9
8 . 12. 18. 27

1
3 . 4
9 . 12 . 16
27. 36. 48. 64

1
4 . 5
16. 20. 25
64. 80. 100. 125

Et deinceps ſimiliter pro reliquis.

maior

maior est quàm 4. in aggregato ipsorum 2. & 3. hoc est, in 5. ergo aggregatum 18. & 12. superatur ab aggregato ipsorum 8. & 27. in 5. Quare aggregatum ipsorum 18. & 12. cum 5. coniunctum, fit æquale aggregato ipsorum 8. & 27. Quod fuit ostendendum. Similiter pro duabus quibuslibet proximis radicibus argumentando procedam. Sicut proponitur.

PROPOSITIO 107[a].

Omnis cubus centralis cum impari collaterali coniunctus, conficit duplum aggregati cuborum primi generis collateralis & præcedentis. Nam numerus, qui fit ex aggregato radicum duarum, scilicet propositi loci, & præcedentis, hoc est, ex impari collaterali in aggregatum quadratorum collateralis, & præcedentis, hoc est, in quadratum centralem collateralem, est per 89[a] huius, gnomon collateralis in quadratis quadratorum. Et per 99[a] huius, talis gnomon est cubus centralis. Verùm talis numerus cum aggregato radicum collateralis & præcedentis, hoc est, cum impari collaterali coniunctus, efficit per præmissam, duplum aggregati cuborum collateralis & præcedentis, hoc est, cuborum ipsarum radicum. Igitur cubus centralis cum impari collaterali coniunctus, facit ipsum tale cuborum duplum: quod est propositum.

PROPOSITIO 108[a].

Omnis cubus primi generis, cum præcedenti cubo coniunctus, conficit collateralem tetrahedrum centralem. Nam, per 105[a] præmissam, cubus centralis cum impari collaterali coniunctus, conflat duplum tetrahedri centralis. Et per præcedentem, idem cubus centralis cum impari collaterali coniunctus, efficit duplum aggregatum cuborum collateralis & præcedentis. Igitur tale cuborum duplum, æquum est duplo tetrahedri. Et perinde cuborum aggregatum æquale erit ipsi tetrahedro centrali: quod est propositum.

PROPOSITIO 109[a].

Omnis tetrahedrus centralis potest esse cubus centralis tertii generis, hoc est cubus mixtus, compositus scilicet ex cubis primi generis collaterali & præcedenti. Vocamus autem huiusmodi cubum mixtum: quoniam ex mixtura duorum cuborum primi generis compaginatur: sicut & quadratus centralis conficitur ex combinatione duorum primi generis quadratorum, scilicet collateralis & præcedentis. Cum igitur, per præmissam, tetrahedrus constet ex collaterali & præcedenti primi generis, cubis: & ex eisdem cubis constet

cubus

cubus mixtus collateralis, per suam diffinitionem iam satis constat propositum.

PROPOSITIO 110ª.

Omnis icosahedrus cum quadruplo imparis collateralis coniunctus, conficit quincuplum collateralis pyramidis centralis. Et hoc quoniam numerus basium icosahedri ad numerum basium pyramidis centralis, scilicet 20. ad 4. quincuplus est. Item numerus laterum linearium illius ad numerum laterum linearium huius, scilicet 30. ad 6. quincuplus est, & ideo aggregatum pyramidum triangularium componentiũ icosahedrum ad aggregatum pyramidum triangularium cõponentium tetrahedrum centralem quincuplum est, quippe quæ sequuntur numerum basium. Et similiter aggregatum triangulorum ad aggregatum triangulorum quincuplum, vt qui sequuntur numerum laterum. Addatur igitur vnitati cẽtrali ipsius icosahedri quaternarius: & sic quinarius erit quincuplus ad vnitatem centralem pyramidis, seu tetrahedri centralis. Cumque semidiametri icosahedri sint 12. & semidiametri tetrahedri sint 4. iuxta numerum scilicet angulorum solidorum: atque semidiametri 12. sint totidem radices collaterales; oportebit 12. radicibus addere 8. radices collaterales, & perinde quadruplum paris numeri collateralis (quando scilicet, radix duplicata conficit parem) vt aggregatum semidiametrorum in icosahedro existat quincuplum aggregati semidiametrorum tetrahedri: Sed quadruplum paris numeri collateralis: quoniam scilicet par cum vnitate facit imparem collateralem. Igitur quadruplum imparis collateralis appositus icosahedro, facit omnia, quæ concurrunt ad structuram ipsius icosahedri quincupla eorum, quæ componunt tetrahedrum, singula singulorum, & perinde totum numerum totius quincuplum: quod est propositum.



REPASTINATIO QVORVNDAM LOCORVM.

PROPOSITIO 1ª.

QVOD fit ex quouis numero in quotlibet numeros, æquale est ei, quod fit ex illo in aggregatum ex his. Ostenditut in decima sexta, noni Elementorum, quo ad numeros: & in prima secundi quo ad lineas.

PROPOSITIO 2ª.

Si aliquis numerus duos singulos multiplicet: producta erunt multiplicatis proportionalia. Ostenditur in 18ª septimæ quo ad numeros, & in pª sexti, quo ad lineas.

PROPOSITIO 3ª.

Si numeros duos vnitate distantes aliquis multiplicet: multiplicans erit differentia productorum. Vt si ipsos b c. quorum c. vnitate maior, multiplicet ipse d. numerus & faciat, ipsos g h. hoc est, d. multiplicans b. facit g. at d. multiplicans c. faciat h. tunc dico, quòd h. excedit ipsum g. in ipso d. Patet, quoniam ex diffe. multiplicationis g. continet ipsum d. totiens, quot vnitates sunt in b. atque h. ipsum d. toties, quot vnitates sunt in c. igitur h. continebit ipsum d. semel pluries, quàm g. continet eundem. hoc est, h. excedet ipsum g. in ipso d. Quod est propositum.

b	d	c
2		3
	4	
g		h
8		12

PROPOSITIO 4ª.

Existentibus quatuor numeris proportionalibus: quod fit ex primo in vltimum, æquale erit ei, quod fit ex reliquis. Ostenditur in 20ª septimi, quo ad numeros: & in 15ª sexti quo ad lineas.

PROPOSITIO 5ª.

His prælibatis, ponatur vnitas a. quilibet autem numerus b. ipse autem c. vnitate maior quàm b. Deinde b. in se faciat d. b. in c, faciat e. & c. in se faciat f. Post hæc b. in d. faciat g. Item b. in e. faciat h. Adhuc b. in f. faciat k. Demum c. in f. faciat l. tandem b. in g. faciat m. Item b. in h. faciat n. Necnon b. in k. faciat o. Sic b. in l. faciat p. Denique c. in l. faciat q. Quibus dispositis.

PROPO-

PROPOSITIO 6ª.

Ipſe d. erit quadratus ipſius b. Et ipſe f. quadratis ipſius c. Item e. parte altera longior, ſiue ſupplementum in quadrato ipſius b c. Adhuc ipſe g. erit cubus ipſius b. ipſe autem l. cubus ipſius c. Ipſi quoque h k. medij proportionales, ſupplementa in cubo ipſius b c. Denique ipſe m. quadratus ſecundus ipſius b. hoc eſt quadratus ipſius d. Ipſe autem q. quadratus ſecundus ipſius c. hoc eſt quadratus ipſius f. Ipſique n o p. medij proportionales ad integrandum, vt patebit, quadratum ſecundum ipſius b c. hoc eſt, quadratũ eius quadrati, quem conſtituunt quadrati d f. cum duplo ipſius e. Hæc omnia conſtant ex diffinitionibus ipſorum quadratorum, cuborum, & ſupplementorum, ſed quadrata primum & ſecundum, & cubus ipſius b c. demonſtrabuntur.

a
1
b c
2 3
d e f
4 6 9
g h k l
8 12 18 27
m n o p q
16 24 36 54 81

PROPOSITIO 7ª.

Poſt vnitatem duo numeri b c. ſunt termini proportionis ſuperparticularis. Tamque tres numeri d e f. ſequentis ordinis, quàm quatuor g h k l. penultimi: quamq; quinque m n o p q. poſtremi, ſunt continue proportionales in dicta dudum proportione. Quoniam ſcilicet b. multiplicans ſingulos b c. facit ſingulos d e. Ideo per ſecundam præmiſſarũ, erit ſicut b. ad c. ſic d. ad e. Item quoniam c. multiplicans ſingulos b c. facit ſingulos e f ideo p eãdẽ, ſicut b. ad c. ſic e. ad f. Quare d e f. ſunt cõtinue proportionales in proportione ſorum b c. Similiter & per eandem, oſtendemus, quòd tam g h k l. quàm ipſi m n o p q. ſunt in eadem proportione ipſorum b c. continue proportionales. Quod eſt propoſitum.

PROPOSITIO 8ª.

Item ſicut ipſi a b d g m. ſunt continuè proportionales: ita & ipſi c e h n. nec non ipſi f k o. Atque ipſi l p. ſunt in eadem proportione continua proportionales. Adhuc, ſicut ipſi a c f l q. ſunt continue proportionales; ita tam ipſi b e k p. quàm ipſi d h o. quamq; g n. ſunt in eadem continua proportione proportionales. Hæc omnia patent per præcedentem, & per permutatam proportionalitatem.

PROPOSITIO 9ª.

Itẽ a e o. ſunt in proportione continua ſicut b h. & cæteri ad æquidiſtantiam deſcendentes. Similiter m h f. ſunt in proportione continua, ſic g e. & cæteri condeſcendentes. Demum ipſi q k d. ſunt in proportione continua, in qua

f b.

fb. cæterique correlatiui. Constat ex compositione æqualium proportionum, ex quibus patet conditio & proprietas huiusce descriptionis numerorũ, non tã ad necessitatẽ demõstrationum, q̃ ad pleniorem suppositionis intelligentiam.

PROPOSITIO 10ª.

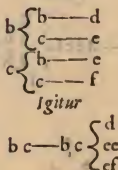
Sicut vnitas est differentia duorum sequentium b c. numerorum; ita ipsi duo b c. sunt differentiæ trium sequentium d e f. Et hi tres differentiæ quatuor sequentium g h k l. Atque hi demum quatuor differentiæ quinque m n o p q. postremum per ordinem sumptæ. Patet hoc totum per tertiam præmissarum, quoties opus est, adductam.

PROPOSITIO 11ª.

Omnis impar præcedenti quadrato appositus, constituit sequentem quadratum. Patet: nã in proposita descriptione, ipsorũ b c. semper vnus est impar, & reliquus par sibi collateralis. Quare totus b c. impar erit. Sed per præcedentem, b c sunt differentiæ ipsorum d e f. igitur b c. impar adiectus ipsi d. quadrato, cõficit ipsum f. quadratũ sequentẽ: qđ est ꝓpositũ.

PROPOSITIO 12ª.

Numeri quadrati d f. ex ipsis b c. siue vnitate, siue quocunq; numero differentibus, vnà cum duplo ipsius e. medij proportionalis, conflant quadratum ex toto b c. factũ. Hæc in 16ª. noni per numeros, & in 4ª secundi Elementorum per lineas demonstratur. Demonstrabitur & hìc hoc modo. Ipse b. in b c. singulos, per 5ª præmissarum, facit ipsos d e. singulos. Item ipse c. in b c. singulos facit ipsos e f. singulos: Igitur, per primam præmissarum, totus b c. in totum b c. faciet aggregatum ex d e e f. hoc est, quadratum, quod ex b c. æquabit congeriem ipsorũ d f. duplique ipsius e. Quod fuit demõstrãdũ.



PROPOSITIO 13ª.

Duo quadrati proximi cum media parte altera lõgiore coniuncti, conficiunt numerum hexagonum æquiangulum. Hæc est 31ª primi horum Arithmeticorum.

COROLLARIVM.

Hinc seqtur pulcherrimũ corollariũ, videlicet, Hexagonũ æqangulũ cũ parte altera longiore collaterali cõiunctũ, consumat quadratum imparis collateralis: Nã per antepræmissam, totũ d e f. (qđ per præmissam est hexagonũ æquiangulũ) cum ipso e. (qui est parte altera longior) conflat quadratum totius b c. imparis collateralis. Quod sequitur supponendo, ipsorum b c. differentiam esse vnitatem.

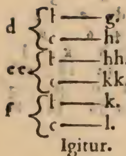
PROPO-

PROPOSITIO 14ª.

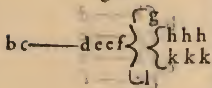
Hexagonus æquiangulus cum præcedenti cubo iunctus, conficit cubum sibi collateralem. Hoc est, aggregatum ex ipsis d e f. quod, per præcedentem, est hexagonus æquiangulus, coniunctus cũ g. Cubo cõflat ipsum l. cubũ: quod ostensum fuit in 52ª primi horum Arithmeticorum. Ostẽdetur & hic, hoc modo. Per 10ª præcedentium, ipsi d e f. numeri sunt tres differentię ipsorũ g h k l. fit ergo, vt totum d e f. coniunctũ cũ ipso g. cubo conficiat ipsum l. cubũ: qđ fuit demonstrãdũ

PROPOSITIO 15ª.

Duo cubi partium cum triplis mediorum proportionalium coniuncti conficiunt cubum totius. Hoc est, ipsorum b c. siue vnitate, siue quocunq; numero differentiũ cubi, qui sunt ipsi g l. cũ triplis ipsorũ g k mediorũ proportionaliũ coniuncti, perficiũt cubũ totius b c. quod in 21ª secundi horũ arithmeticorũ fuit ostensum: hic tñ facilius ostẽdetur, sic: Per qñtã præmissarũ, ipse d. in singulos b c. facit singulos g h. Item duplum ipsius e. in singulos b c. facit h h. atque k k. hoc est, duplum ipsorum h k. Adhuc f. in singulos b c. facit ipsos k l. singulos Igitur, per primã præmissarum, ipse b c. ductus in aggegatũ ex d f. duploq; ipsius e. (qđ per 12ª præmissarũ, est quadratũ ipsius b c.) Hoc est b c. radix ducta in suũ quadratũ, producet aggregatũ ex ipsis g l. triploq; ipsius h. & triplo ipsius k. radix aũt in quadratum producit suum cubũ. Ergo tale aggregatum ex g l. triploque ipsorum h k. est cubus ipsius b c. numeri. Quod fuit demonstrandum.

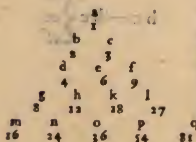


Igitur.



PROPOSITIO 16ª.

Duplum ipsius e. cum vnitate, cõficit aggregatũ ipsorum d f. hoc est, duplum numeri parte altera longioris, cum vnitate conflat aggregatum collateralis & precedentis quadratorum. Patet, quoniam si differentiæ ipsorum d e. & ipsorum e f. essent æquales, tunc duplus ipsius e. esset æqualis aggregato ipsorum d f. Sed cùm differentia ipsorum d f. sit vnitate maior, quàm differentia ipsorum d e. illa, scilicet c. & hæc b. per 3ª huius, idcirco fit vt aggregatum ipsorum d f. vnitate superet duplum ipsius e. sicut proponitur.



PROPOSITIO 17ª.

Aggregatum ipsorum b c. est excessus, quo aggregatum ipsorum g l. maius est aggregato ipsorum h k. Patet sic. Si differentia ipsorum g h. esset æqualis differentiæ ipsorum k l. Tunc aggregatum ipsorũ g l. esset æquale aggregato ipsorũ h k. Sed

quoniam

quoniam differentia ipsorum k l. hoc est f. superat differẽtiã ipsorũ g h. hoc est, ipsum d. in aggregato ipsorum b c. quod per 10ᵃ præmissarum, est id, quo f. superat ipsum d: idcirco aggregatum ipsorum g l. maius est aggregato ipsorum h k. in aggregato ipsorum b c. Quod fuit demonstrandum.

a
1
b c
2 3
d e f
4 6 9
g h k l
8 12 18 27
m n o p q
16 24 36 54 81

PROPOSITIO 18ᵃ.

Ex aggregato ipsorum b c. in ipsum e. producitur aggregatum ipsorũ h k. Patet: nam per 5ᵃ præmissarum, b. in e. facit h. Itẽque b. in f. facit k. Sed per 7ᵃ sicut b. ad c. sic e. ad f. Igitur per 4ᵃ ipse c. in e. faciet k. Quare per primam, totum b c. in e. facit totum h k. Quod est propositum.

PROPOSITIO 19ᵃ.

Ex aggregato ipsorum b c. in aggregatum ipsorum a e. producitur aggregatum ipsorum g l. Nam cùm, per præcedentem, ex aggregato ipsorum b c. in ipsum e. fiat aggregatum ipsorum h k. Iam ex b c. in a e. (qui ipsum e. vnitate excedit) producetur aggregatum ex h k. & b c. Sed tale aggregatum, per ante præmissam, est æquale aggregato ipsorum g l. Igitur & ex b c. in a e. producetur totum g l. Quod est propositum.

PROPOSITIO 20ᵃ.

Ex aggregato ipsorum b c. in aggregatum ipsorũ, ipsorum d f. producitur aggregatum ipsorum g h k l. Nam cum per ante præmissam ex b c. in e. fiat h k. & per præcedentem, ex b c. in a e. fiat g l. iam, per primam præmissarum, ex b c. in aggregatum ex duplo ipsius e. & ex a. producetur totum g h k l. Sed per 16. duplum ipsius e. cum a. vnitate, conflat aggregatum ipsorum d f. igitur ex b c. in d f. producetur totum g h k l. Quod fuit ostendendum.

PROPOSITIO 21ᵃ.

Ex aggregato radicum vnitate distantiũ, in aggregatum quadratorum ipsarum radicum, producitur differentia secundorum quadratorum. Hæc est, 89ᵃ primi horum arithmeticorum: tamen hic breuius demonstratur. Nam cùm b c. sint radices vnitate distantes, quæ semper faciunt imparẽ collateralem ipsius f. quadrati, quem proximo præcedit d. quadratus constat ꝙ hic id ipsum proponitur demonstrãdũ, ꝙ in dicta 89ᵃ. Itaq; cũ per 10ᵃ præmissarũ aggregatũ ipsorum g h k l. sit differentia ipsorum m q. qui sunt secundi quadrati dictarum radicum, hoc est, quadrati ipsorum d f. quadratorum: atque per præcedentem ex toto b c. in totum d f. producatur

a
1
b c
2 3
d e f
4 6 9
g h k l
8 12 18 27
m n o p q
16 24 36 54 81

ducatur totum g h k l.

SCHOLIVM.

Talis autem ſecandorum Quadratorum differentia dicitur Gnomo ſecundorum quadratorum: & idem eſt Octahedrus centralis, Idem cubus centralis: Idē quoq; Pyramis triāgula centralis locorum impariū, vt ſatis oſtēſum eſt in primo horum arithmeticorū.

PROPOSITIO 22ª.

Aggregatum ex m q. ex quadruplo ipſorum n p. & ex ipſius o. ſexcuplo, eſt ſecundus quadratus totius b c. Hæc eſt concluſio dictarū ꝓpoſitionū, in qua poſſum⁹ nobis laudē totā vēdicare, ꝗ necubi hacten⁹ neq; apud Græcos, neq; apud Latinos ſit demōſtrata. Itaq; qđ de ipſius b c. quadrato fuit oſtēſum in 12ª. de cubo aūt eiuſdē in 15ª præmiſſarū idipſum de ſecūdo eiuſdē b c. quadrato demonſtret hæc 22ª in qua toti⁹ huius repaſtinationis gloria conſiſtit. Siue igitur ipſorū b c dr̄a ſit vnitas, ſiue alius quicunq; numerus, hæc demōſtratio locū habet. Itaq; adductis pª 4ª & 5ª præmiſſarū, liquet ꝗ ex b c. toto in ipſum g. fit totū m n. Itē ꝗ ex b c. toto in h. fit totū n o. Itē ex b c. toto in k. fit totū o p. Itē ex b c. toto in l. fit totū p q. Hinc ſequitur, vt, ꝗ iā dictū eſt, ex b c. toto in g. fiat m n. & ex b c. in triplū ipſius h. fiat triplū ipſoꝝ n o. & ex b c. in triplū ipſius k. fiat triplū ipſoꝝ o p. & ex b c. in l. fiat totū p q. Igitur per pª præmiſſaꝝ ex ipſo b c. in aggregatum ex g l. triploq; ipſoꝝ h k. quòd aggregatum per 15ª præmiſſaꝝ eſt cub⁹ ipſius b c. producet aggregatū ex m q. quadruplo ipſorū n p. atq; ſexcuplo ipſius o. Sed ex b c. in ſuū cubū producit ſecund⁹ quadratus ipſius b c. Ergo talis 2⁹ quadratus ipſi⁹ b c. erit cōgeries ex m q. ex quadruplo ipſorū n p. atq; ſexcuplo ipſius o. ſicut demonſtrandum fuit.

b c { g —— mn
hhh — nnn.ooo.
kkk — ooo.ppp.
l. —— p q.
Cubus —— □⁹ 2⁹.

5 { 8 —— 40
36 —— 180
54 —— 270
27 —— 135

1
1 . 2
1 . 2 . 4
1 . 2 . 4 . 8
1 . 4 . 8 . 16.

a
1
b c
d e f
2 3
4 6 9
g h K l
8 12 18 27
m n o p q
16 24 36 54 81
r
216
r
1296

1
3 . 4
9. 12. 16
27 . 36. 48. 64
81. 108. 144. 192. 256

1
4 . 5
16. 20. 25
64. 80. 100. 125
256. 320. 400. 500. 625

1
5 . 6
25 . 30. 36
125. 150. 180. 216
625. 750. 900. 1080. 1296.

Et ſic deinceps in infinitū.

PROPOSITIO 23ª.

Adhuc dico quòd o. eſt quadratum ipſius e. Patet: nam per nonam a e o. ſunt continue proportionales. Cumque a. ſit vnitas, erit per octauam noni Elementorum, o. quadratus & per diffin. eius radix e. quod eſt propoſitum. Vel ſic: quoniam per ſeptimam ipſi d e f. ſunt continue proportionales: & per octauam, ipſi b e k. ſunt continue proportionale. iam per vigeſimam ſeptimi b. in k. faciet quadratum ipſius e. ſicut d. in f. Sed per quintam harum b. in k. facit o. igitur o. eſt quadratum ipſius e. Quod eſt propoſitum.

PROPOSITIO 24ª.

Item dico, quòd tam g. in l. quàm h. in k producit cubum ipſius e. Patet ſic: ex e. in o. fiat r. eritque r. cubus ipſius e. per diffin. Quoniam per præmiſſam o. eſt □. ipſius e. Sed, per octauam harum, ſicut e. ad h. ſic k. ad o. atque per 20ª ſeptimi, quod fit ex e in o. idem ex h. in k. igitur ex h. in k. fiet r. Cumque per eandem, quod ex h. in k. idem fiat ex g. in l. quoniam ſcilicet per ſeptimam harum g. ad h. ſicut k. ad l. Iam & ex g. in l. fiet idem r. cubus ipſius e. ſicut proponitur demonſtrandum.

PROPOSITIO 25ª.

Item dico, quòd ex ſecundo quadrato in ſecundum quadratum producitur, ſecundus. Per ſextam præmiſſarum m q. ſunt ſecundi quadrati ipſorum b c. Oſtendendum eſt igitur, quod ex m. in q. producitur ſecundus quadratus, ſic per ſeptimam harum & æquam proportionalitatem, ipſi m o q. ſunt continue proportionales: quare per 20ª ſeptimi, quod fit ex m. in q. eſt id, quod fit ex o. in ſe. Sed, per antepręmiſſam, o. quadratus eſt: ergo quod fit ex o. in ſe, eſt ſecundus quadratus; quare quadratus ſecundus eſt, qui fit ex m. in q & hoc erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Manifeſtum eſt igitur, quòd ſicut ex ductu ipſarum b c.

℞.	2	3	6
□.	4	9	36
cub.	8	27	216
2°□°	16	81	1296

radicum propositarum siue vnitate siue quo vis numero distantium producitur e. ita ex ductu ipsorum d f. quadratorum fit ipse o. quadratus ipsius e. atque ex ductu g l. cuborum, fit ipse r. cubus ipsius e. Et similiter ex ductu m q. duorum quadratorum, fit secundus quadratus ipsius e. qui videlicet fit ex o. in se, qui sit s. Quod etiam constitit per corollarium vndecimæ secundi horum Arithmeticorum. Cætera relinquimus curiosioribus.

LIBRI PRIMI ARITHMETICORVM MAVROLYCI FINIS.

Completus Messanę in freto Siculo in ædibus ipsius Authoris iuxta Cœnobium Carmelitanorum, ad horam noctis secundam diei Dominici, qui fuit Aprilis decimus octauus, & sanctissimum Paschæ festum. Anno salutis. M. D. LVII.

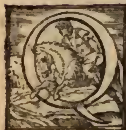


MAVROLICI ABBATIS MESSANENSIS MATHEMATICI

Arithmeticorum Liber Secundus.



PROLOGOMENA.



VONIAM Arithmetica instrumentum est omnis supputationis, & numeri sunt termini, quibus qualibet magnitudo significatur; non dubium est, quin per numeros fieri possit omnis magnitudinis calculus. Cum verò Geometria comprehendat omnium quantitatum species, videlicet lineas, superficies, solida & cętera continua, quę ad hæc redigi possunt; vt tempora, & pondera; duplicem vtique praxim habebit; vnam, quæ fit lineando, alteram, quæ supputando: quarum hæc ab illa tanquam à fonte deriuatur: & illa theorię innititur. Sicut enim tam theoremata, quàm problemata per theoriã demonstrantur, & soluuntur; ita mox siue per lineationem siue per calculum ad praxim rediguntur. Nam intellectu præmeditata lineamus: & lineata calculamus. Et quamuis lineator descriptionem oculo repræsentet, & mentali speculatione punctum geometricum consequatur; tamen calculator numeris etiam idipsum consequitur, sed & paucis characteribus minutiores partes distinguit:

quod lineator non nisi in spacio immenso, vel magno instrumento (quod nulli facile est) præstare potest. Quæ distinctio quidem necessaria est, cùm per numeros, irrationalis, aut ignotæ magnitudinis terminum seu limitem magis ac magis propinquantes vestigamus. Sicuti cum, exempli gratia, proposita circuli diametro, latus trianguli æquilateri, aut quadrati in eo descripti, metiri per easdem partes in quibus diameter supponitur, aut cum planetæ cuiuspiam diurnum motum metiri iubemur. Itaque licèt de theoria numerorum & magnitudinum plerique graues Authores affatim scribant, & numerariam praxim quàm plurimi ludorum magistri passim doceant & literis mandent; nemo tamen hactenus regulas ipsas practicas elementorum, additionis, subtractionis, multiplicationis, diuisionis, radicum extractionis, progressionum, positionum & dimensionum satis demonstrauit. Haud enim cuiuis peruium est, ante oculos ponere quemadmodum praxis quælibet talis à theoria deducatur, & nonnulli idipsum ausi, rem obscuriorem fecere, sicut is, qui algorismum demonstratum edidit. Nos itaque, quatenus sese vires nostræ extendunt, aut quantum calamo dictabit ingenium, tentabimus aliquid super hoc negocio proferre, dum otium prestatur. Itaque, vt ratio poscit, diffinitionibus præmissis, rem aggrediemur, seriatim singula demonstrantes.

Diffinitiones

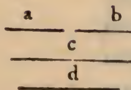
DIFFINITIONES.

Posita ergo quantitas est, quę ad libitum ponitur ad communem eiusdem generis quantitatum mensurā: & quæ ab vnitate denominatur. Sicut vnitas est communis numerorum dimensio. Quando igitur multiplex est ad positam, significabitur eo numero, secundùm quem ipsa multiplex est ipsius positæ. Quando verò quantitas cōtinet partem vel partes positæ, significabitur duobus numeris, scilicet denominatore & numeratore partis vel partium. Vnde quantitas significata ad positam habet eam rationem, quam numerus denominator, ad numeratorem. Quare, si tales numeri fuerunt æquales, quantitas significata erit tūc æqualis positæ: minor aūt, cùm maior fuerit denominator: maior verò, cùm minor. Erit vtique significata quantitas ad positam, aut æqualis, aut multiplex, aut superparticularis, aut superpartiens, aut multiplex super particularis, aut denique multiplex superpartiens, quando maior fuerit significata, quàm posita. Quòd si posita sit maior: tunc talis erit posita ad significatam. Duæ quoque quantitates, quarum denominatores eandem proportionem habebunt ad numeratores, erunt ad inuicem ęquales: quoniam scilicet eandem rationem habent ad positam. Cuius verò denominator maiorem rationem habebit ad numeratorem, maior erit. Quantitas cum quantitate coniungi dicitur, cùm sumitur earum aggregatum. Quantitas à quantitate subtrahi dicitur, cūm sumitur maioris super minorem excessus. Quantitas quantitatem multiplicare dicitur, cùm sumitur quantitas, quæ ad multiplicatam eam habet rationem, quam multiplicans ad positam: Et sumpta sic quantitas, productum vocatur. Vnde, quando multiplicans maior fuerit quàm posita, & productum maius erit multiplicante: & quando minor, minus: & quando æqualis, ęquale. Quantitas in quantitatem partiri dicitur, cum sumitur quantitas, ad quam diuisa eam habet rationem, quam diuidens ad positam. Et sumpta sic quantitas vocatur proueniens, siue quotiens. Vnde si diuidens maior fuerit, quàm posita, & diuisa maior erit quotiente: & si minor, minor; & si æqualis, æqualis. Quadratum alicuius quantitatis est productum eius in se ipsam multiplicatæ: & ipsa tunc radix vocatur. Cubus autem est is, qui fit ex multiplicatione radicis in quadratum. Et

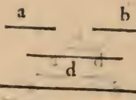
quadratus secundus, qui fit ex quadrato primo in se ipsum, siue ex radice in cubum. Quo fit, vt posita quantitas, radix, quadratum, cubus, & quadratum secundum, sint continue proportionalia: semperque crescentia, si radix sit maior, quàm posita. Decrescentia verò, si minor. Quantitas magnitudine rationalis est, quę positæ commensurabilis est. Quantitas potentia tantùm rationalis est, cuius quadratum duntaxat positæ commensurabile est. Quantitas cubo tantùm rationalis est, cuius cubus solùm positæ commensurabilis est. de qua nihil Euclides. Quantitas quadrato secundo tantùm rationalis est, cuius quadratum secundum duntaxat positæ commensurabile est: quæ medicalis quantitas vocatur. Binomium est bimembris quantitas ex duabus quantitatibus potentia tantùm inuicem commensurabilibus composita. Excessus autem maioris membri supra minus, Apotome, siue recisum, vel residuum vocabitur.

Propositio 1ª.

Quidquid de Numerorum, Linearum, et Solidorum ductu ratione, proportione & Symmetria, atque similitudine ratiocinamur, idem de quolibet quantitatis genere demonstrare atque concludere possumus. Hoc enim fiet assumptis ad demonstrandum diffinitionibus, ac suppositis nostris. Exempli gratia, si duorum numerorum vterque multiplicet reliquum, producti sunt æquales, quæ est 17ª septimi Elementorũ. Igitur etsi duarum quantitatum vtraque multiplicet alteram, producta erunt æqualia. Quod sic ostendam. Quãtitas a. multiplicans quantitatem b. producat quantitatem c. Item quantitas b. multiplicans quantitatem a. faciat quãtitatem d. Aio, quòd quantitates c d. sunt inuicem æquales. Cùm enim ex diffinitione multiplicationis c. producta ad b. multiplicatam sit sicut a. multiplicans ad positam, erit & permutatim c. ad a. sicut b. ad positam. Sed rursus ex diffinition. multiplicationis, sicut b. multiplicans ad positam, sic d. producta ad a. multiplicatam. Igitur sicut d. ad a. sic c. ad a. & perinde, per nonam quinti, c d. quãtitates sunt æquales: quod fuit demonstrandum. Exemplum aliud à sequenti propositione sumptum. Si numerus duos multiplicans duos produxerit, producti sunt multiplicatis proportionales. Igitur & si quantitas duas quantitates multiplicãs, duo ꝓducta fecerit, producta multiplicatis



erunt proportionalia: quod sic ostendam. Quantitas a. multiplicans ipsam b. producat d. multiplicans autem c. faciat e. Aio, quòd sicut est b. ad c. sic est d. ad e. cùm enim per diffinitionem multiplicationis d. producta ad b. multiplicatam, sit sicut a. multiplicans ad positam, nec non e. producta ad c. multiplicatam, sit etiam sicut a. multiplicans ad positam; Iam erit sicut e. ad c. sic d. ad b. Ergo & permutatim erit sicut e. ad d. sic c. ad b. & conuersim sicut d. ad e. sic b. ad c. quod est propositum. Similiter quicquid in septimo, octauo & nono de numeris ostendit Euclides, idem de quantitatibus in genere ostendere possumus. Alicubi tamen pro numeris quantitates rationales substituendo, assumptis diffinitionibus ac suppositis nostris. Quidquid etiam in secundo, sexto & vndecimo Elementorum de ductu & proportione linearum, arearum & solidorum traditur, potest ad quantitates in genere sumptas conuerti. Exempli gratia: prima secundi sic conuertetur: si fuerint duæ quantitates, quarum altera in quotlibet segmenta secetur; illud, quod ex ductu alterius in alteram fiet, æquum erit his, quæ ex ductu quantitatis indiuisæ in vnumquodq; segmentorum diuisæ pariter acceptis producentur. Quod sic ostendam: sint duæ quantitates à indiuisa & b c d. secta in partes quotuis, vt puta tres b c d. & ex a. in totã b c d. proueniat e. nec non ex a. in singulas partes b c d. proueniant singulę f g h. quantitates. Dico tunc, quòd e. æqualis est ipsis f g h. simul sumptis. Nam ex diffin. multiplicationis erit e. ad b c d. sicut a. ad positam. Et similiter sicut a. ad positam, sic f. ad b. sic g. ad c. sic h. ad d. Igitur per vndecimam quinti, & coniunctam proportionem, totum f g h. ad totum b c d. sicut a. ad positam: fuit autem sicut a. ad positam, sic e. ad b c d. ergo sicut e. ad b c d. sic f g h. ad b c d. Quare per nonam quinti f g h. totum æquale est ipsi e. quod erat demonstrandum. Ex qua demonstrabuntur reliquæ propositiones secundi successiue, de quantitatibus in genere. quemadmodum Campanus easdem de numeris demonstrauit in decima sexta noni. Quidquid denique decimus Elementorum de linearum & arearum symmetria & ductu aut proportione ratiocinatur, potest totũ ad quodlibet genus quantitatis conuerti. Exempli gratia, illa propositio, A rationalibus longitudine cõmensurabilib⁹ rectis lineis factũ rectangulum rationale est. ad quantitates in genere sic con-



uertetur quantitatum rationaliũ productũ rationale est. qđ sic ostenditur. Quantitas rationalis a. multiplicans quantitatẽ rationalem b. facit c. Dico tunc, quòd c. quantitas rationalis est. namq; ex a. in se fiat d. & tunc per primã secundi Elementorum, ad quantitates redactã erit, sicut a. ad b. sic d. ad c. sed a. ipsi b. commensurabilis est per hypothesim: ergo & d. ipsi c. commensurabilis est, per 10ª decimi. Cumq; d. rationalis sit (quia quadratum est ipsius a.) iam per diffin. & c. rationalis erit. Quod est propositũ. Similiter procedere poterimus, reliquas decimi Element. propositiones demonstrando. Et quod nona eiusdem libri de quadratis ostendit, pōt etiam ad cubos & ad secunda quadrata quantitatum referri. sic; A commensurabilibus inuicem quantitatibus producta quadrata, sunt ad inuicem sicut quadrati numeri : & producti cubi, sicut cubi numeri: & producta secunda quadrata, sicut secundi numeri quadrati. Contrà, & quantitates, tam, quarũ quadrata sunt ad inuicem, sicut numeri quadrati, quàm, quarum cubi sunt ad inuicem, sicut numeri Cubi: quàmq; quarum secunda quadrata sunt ad inuicem, sicut secundi quadrati; sunt & ad inuicem omnino commensurabiles. Quod haud difficilius ostenditur, quàm nona ipsa quoad quadrata. Hoc, scilicet supposito & antè demonstrato, quòd sicut inter duos quadratos numeros semper interiacet vnus numerus medius proportionalis : ita inter cubos interiacent duo medij proportionales: & inter secundos quadratos tres medij proportionales. Ab incommensurabilibus verò inuicem quantitatibus facta quadrata non sunt ad inuicem, sicut quadrati numeri; neq; cubi, sicut cubi numeri : nec secunda quadrata sicut secundi quadrati numeri. Contrà, & quantitates, tam quarum quadrata non sunt ad inuicem, sicut quadrati numeri, quàm quarum cubi nõ sunt inuicem, sicut cubi numeri, quàmque quarum secunda quadrata non sunt inuicem, sicut secũdi quadrati numeri; sunt intus se incõmensurabiles. quæ duæ proportiones sequuntur ex præmissis à destructione contrariorum. Quo fit, vt quot linearum irrationalium species tractantur in decimo Elementorũ, totidẽ eiusdẽ nominis, & earundẽ proprietatũ speciei inueniãtur inter quantitates in genere sumptas. Ita, inquã, vt in omni quantitate vsius generis existant oẽs tales rationalium species. Per hanc igitur propositionem omnis geometrica speculatio redigitur ad numerariam praxim.

1
2 . 3
4 . 6 . 9
8 . 12 . 18 . 27
16 . 24 . 36 . 54 . 81

PROPO-

PROPOSITIO 2ª.

Omnis quantitatum additio, subtractio, multiplicatio, seu diuisio, vel radicum extractio, fit per eos numeros, à quibus ipse quantitates significantur. Hoc est, numerorum, per quos duę vel quotlibet quantitates singulos singulæ significantur, aggregatum est numerus significans talium quantitatum aggregatum. Et numerorum, per quos duæ quantitates inæquales significantur, excessus, est numerus significãs ipsarũ quantitatũ excessum. Item numerorum, per quos duę quantitates significantur, productus, est numerus, significans earũ quantitatũ productum. Adhuc diuiso numero in numerũ, prouenit seu elicitur numerus significans quantitatem prouenientem ex diuisione quantitatis illius nũi in quantitatẽ hui⁹. Demũ oĩs radix quadrati, vel cubi numeri est numerus significans quantitatẽ, quæ radix est quantitatis quadratæ vel cubicæ per ipsum quadratũ vel cubũ significatæ.

PROPOSITIO 3ª.

Quantitates, quarum denominatores sunt æquales, sunt adinuicem, sicut numeratores. Sint duæ quantitates a b. c d. quarum denominatores b d. ponantur æquales: numeratores autem sint a c. Aio, quòd quantitas a b. ad quantitatem c d. est, sicut a. ad c. Nam ratio quantitatis a b. ad quantitatem c d. componitur ex ratione ipsius a b. ad positam, & ex ratione positæ ad ipsam c d. Numeri aũt a. ad numerũ c. ratio componitur ex ratione numeri a. ad numerum b. & ex ratione numeri b. vel d. (sunt enim æquales per hyppotesim) ad numerum c. Sed per diffi. terminorũ, quantitas a b. ad positam, est sicut numerus a. ad numerũ b. quantitas aũt posita ad quãtitatẽ c d. sicut numerus d. ad numerũ c. Igitur per æquã proportionẽ erit quantitas a b. ad quantitatẽ c d. sicut numerus a. ad numerũ c. Quod erat demonstrandum.

$\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$

PROPOSITIO 4ª.

Quantitates, quarum numeratores sunt æquales, sunt ad inuicem sicut denominatores, ordine commutato. Sunto, sicut in præmissa, quantitates a b. c d. in quibus ponantur æquales ipsi numeratores a c. Aio tunc, ꝙ quantitas a b. ad quãtitatẽ c d. est sicut numerus d. ad numerũ b. Fiat enim ex a. in d. numerus e. & ex b. in c. fiat f. ex b. verò in d. proueniat g. eritque, per primã sexti, sicut a. ad b. sic e. ad g. vt in prima propositione hui⁹ ostẽdim⁹: quare, sicut in diffinitionibus patuit, quãtitas e g. ęqualis erit ipsi a b. Item erit simi-

liter,

liter, sicut c. ad d. sic f. ad g. & ideo quantitas f g. æqualis erit similiter quantitati c d. Et q̄m quantitatum e g. f g. idem est denominator, ideo per pręcedētē, e g. ad ipsum f g. erit sicut numerus e. ad numerū f. Sed e. ad f. sicut d. ad b. q̄m c. ipsi a. æqualis multiplicans ipsos b d. facit ipsos f e. Igitur sicut d. ad b. sic erit quantitas e g. ad quantitatem f g. hoc est, quantitas a b. ad quantitatem c. d. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO 5ª.

Quantitatum duarum ratio componitur ex rationibus numeratorum & denominatorum ordine commutato sumptis.

Sunto binæ quantitates a b. c d. quarum numeratores, a c. denominatores autem b d. numeri. Aio, q̄ ratio quantitatis a b. ad quantitatem c d. componitur ex rationibus duabus, scilicet ex ratione numeri a. ad numerū c. & ex rōne numeri d. ad numerū b. Ponatur enim his media quantitas e f. cuius numerator e. sit æqualis numero c. & denominator f. æqualis numero b. eritque, per antepræmissam, quantitas a b. ad quantitatem e f. sicut numerus a. ad numerū e. hoc est, sicut a. ad c. Et per præcedentem, quantitas e f. ad quantitatē c d. sicut numerus d. ad numerū f. hoc est, sicut d. ad b. Sed posita media quantitate e f. ratio quātitatis a b. ad quātitatē c d. cōponitur ex ratione quantitatis a b. ad quantitatē e f. & ex ratione quantitatis e f. ad quātitatē c d. Igitur ex æquali, eadem ratio quantitatis a b. ad quantitatem c d. componetur ex ratione numeri a. ad numerum c. & ex ratione numeri d. ad numerum b. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO 6ª.

Duas propositas quantitates coniungere. Si propositæ quantitates singulis significentur numeris. Tunc cōiungātur numeri, per quos propositæ quantitates significātur: Nā aggregatū tale erit numer⁹ significās aggregatū ꝓpositarū quātitatū quæsitū per secūdā huius. Si autē propositę quātitates singulæ binis significētur numeris. sint ipsæ tūc a b. c d. quarū numeratores qdē a c. denominatores aūt (vt assolet) b d. Ducatur b. in c. & fiat e. Ducatur etiam a. in d. & fiat f. Sitque ipsorū e f. aggregatū g. deinde ex b. in d. fiat h. eritq; quātitas g h. cui⁹ numerator g. denominator aūt h. aggregatū ipsarū a b. c d. quantitatū quæsitū. Cū em̄ b. multiplicās singulos c d. faciat singulos e h. erit per primam huius, sicut e. ad d. sic e. ad h. Et similiter, q̄m d. multiplicās singulos a b. facit singulos f h. eritque & sicut a. ad b. sic f. ad h. Quare,

per diffinita, quantitas e h. erit æqualis quantitati c d. & quãtitas f h. æqualis quantitati a b. Sed per diffinitionem, ficut numerus e. ad numerũ h. fic quantitas e h. ad pofitã: ac ficut numerus f. ad numerũ h. fic quantitas f h. ad pofitam. Igitur per 24[a] quinti Elemen. ficut g. aggregatum ipforũ e f. ad numerũ h. fic aggregatũ ex ipfis e h. f h. quantitatibus, hoc eft ex ipfis c d. a b. quantitatibus ad pofitam. Quare, per diffin. g h. numeri fignificant dictũ quantitatũ a b. c d. aggregatum, ita fcilicet, vt g. numerus fit numerator, & h. nũs denominator. Itaq; g h. quantitas eft propofitarum a b. c d. quantitatũ congeries, quæ quærebatur. Quod fi propofitarum quantitatum altera tantùm binis notetur numeris, tunc reliquæ fupplendus eft numerus denominator, qui quidem in quantitatibus ad pofitam multiplicibus femper eft vnitas, quæ integritatem pofitæ in integris fignificat.

PROPOSITIO 7[a].

Duabus quantitatibus inæqualibus propofitis, minorem à maiori fubtrahere. Si propofitæ quantitates fingulis denotentur numeris: tunc numerus minor fubtrahatur à maiori: nã relictus numerus erit is, qui fignificat quãtitatẽ, quæ fupereft poft fubtractionem minoris quantitatis à maiori, per fecundam huius. Si autem propofitæ quantitates, quarũ altera ab altera fubtrahenda eft, fingulæ binis exprimantur numeris. Sint ipfæ tunc a b. maior, & c d. minor: quarũ numeratores fint a c. denominatores b d. ita vt oporteat quantitatẽ c d. fubtrahere à quantitate a b. Ducatur a. in d. & fiat e. deinde b. in c. & fiat f. Mox fubtrahatur ab e. numerus f. & reliquum fit g. Ducatur demum b. in d. & fiat h. Eritque quantitas g h. cuius numerator g. denominator h. quę relinquitur poft fubtractionem ipfius c d. quantitatis, ab ipfa quantitate a b. Cũ enĩ d. mĩcans fingulos a b. faciat fingulos e h. erit, p p[a] huius, ficut a. ad b. fic e. ad h. & fimiliter, qm̃ b. mĩcans fingulos c d. facit fingulos f h. ideo ficut c. ad d. fic f. ad h. Quare per corollaria diffinitionum, quantitas e h. ipfi a b. & quantitas f h. ipfi c d. æqualis erit. Et quoniam h numerus eft cõis earum denominator, ideo per 4[a] huius, ipfæ quantitates e h. f h. funt ad inuicẽ ficut e f. numeratores. Quamobrẽ exceffus numeratorũ, fcilicet g. nũs fignificabit quantitatũ e h. f h. differentiã, hoc eft, ipfa g h. quantitas erit talis dr̃ia: ficut erat demonftrandũ. Quòd fi propofitarũ quantitatum altera tm̃ binis notetˀ numeris: tũc reliquę fupplẽdus eft nũs denominator:

$\frac{c}{d}\ \frac{2}{5} \times \frac{4}{6}\ \frac{a}{b}$

c. 12
f. 10
g. $\overline{2}$
h. 15

denominator: qui quidem in quantitatibus ad poſitam mul tiplicibus ſemper eſt vnitas, integritatem poſitæ ac non diuiſæ ſignificãs. Item notandũ tam in præſenti, quàm in præcedenti propoſitione, quòd quantitates, quæ ad poſitam multiplices ſunt, & inſuper particulares, aut ſuperficientes redigendæ ſunt ad partes, ita vt ſingulæ binis ſignificentur numeris, atque modus demonſtrandi locum habeat.

COROLLARIVM.

Hinc conſtabit, propoſitis duabus quantitatibus, vtra ſit maior.

PROPOSITIO 8ª.

Duabus quãtitatibus propoſitis, alterã in alterã multiplicare.

Si propoſitæ quantitates ſingulis ſignentur numeris: tunc numeri ſignificantes ipſas quantitates multiplicentur alter in alterum: Nam productum, per ſecundam huius, erit numerus ſignificans quantitatem ex propoſitarum quãtitatũ multiplicatione productam. Si aũt quãtitates, quæ mul tiplicandæ proponuntur, ſingulæ binis ſignificentur numeris: tunc ſint ipſæ a b. c d. quarũ quidẽ numeratores ſint a c. denominatores verò b d. Et ducatur numerus a. in numerũ c. & proueniat e. Itẽ ducatur numerus b. in numerũ d. & proueniat f. Eritq; quantitas e f. cuius numerator e. denominator f. productum ex multiplicatione quantitatis a b. in quantitatẽ c d. Nã, per quintã huius libri, ratio quantitatis e f. ad quãtitatẽ c d. cõponitur ex rationib⁹ numeri e. ad numerũ c. & numeri d. ad numerũ f. Ratio aũt quãtitatis a b. ad poſitã cõponit ex ratione numeri a. ad vnitatẽ, & ex ratione vnitatis ad numerũ b. Sed p diffi. multiplicationis numerorũ, ſicut a. numerus ad vnitatẽ, ſic numerus e. ad numerum c. & ſicut vnitas ad numerũ b. ſic numerus d. ad numerũ f. Igitur, per æquã proportionẽ, quantitas e f. ad quantitatẽ c d ſicut quantitas a b. multiplicans ad poſitã. Quare, per diffi. multiplicationis, quantitas e f. eſt prædictum proueniens ex ductu quantitatis a b. multiplicãtis in quantitatẽ c d. multiplicatã: quod quærebatur. Quòd ſi altera propoſitarũ quantitatũ duobus ſignetur numeris, reliquã verò vno: tunc huic ſupplẽd⁹ eſt, vt in præmiſſis factũ eſt, numerator, hoc eſt, vnitas: Et ſi quantitatũ altera vel ambæ ſint multiplices ad poſitam, & inſuper ſuperparticulares, vel ſuperpartientes; tunc redigantur ad partes, ita vt ſingulæ binis connotatæ numeris, tã ad praxim, q̃ ad demonſtrationẽ accõmodẽtur.

a. 2 — 4 c. 8 e.
b. 3 — 5 d. 15 f.

PROPO-

PROPOSITIO 9ª.

Duabus quantitatibus propositis, alteram in alteram partiri.

Si propositæ quantitates singulis significentur numeris, túc ijdem numeri quátitaté ex diuisione vnius in alteram, prouenienté exprimerent, ita quidem, vt numerus diuisus sit numerator & diuidés denominator. Ná sicut se habet diuidés quantitas ad diuisam, sic se habet posita ad quantitatem ex diuisione prouenienté. Vt si sit diuidenda quantitas a. diuidens vero b. iam dico tunc, quod quantitas a b. est quantitas, quę prouenit ex diuisione ipsius a. in ipsam b. Nam per 4ª huius, sicut est numerus b. ad vnitatem, sic est quantitas a. ad quantitatem a b. quandoquidem earum numeratores sint æquales, quia. s. vtrobique est numerus a. & denominator quantitatis a. sit vnitas: denominator vero quantitatis a b. sit ipse b. Ergo sicut quantitas b. scilicet diuidens ad positam (quæ per vnitatem significatur) sic quantitas a. scilicet diuisa ad quantitatem a b. prouenienté. Quamobré, per diff. diuisionis; ex diuisione quantitatis a. in quantitatem b. prouenit quátitas a b. quod fuit demonstrandum. Quòd si quátitates, quarum altera in alteram diuidenda est, singulæ binis denotentur numeris: tunc ipsæ a b. c d. quarú numeratóres a c. denominatores b d. ita vt ipsa a b. sit diuidéda in ipsam c d. Ducatur d. in a. & proueniat e. Item c. in b. & proueniat f. eritque quantitas e f. cuius numerator e. ac denominator f. ea, quæ prouenit ex diuisione ipsius a b. in ipsam c d. Quoniam, per quintam huius, quantitatis a b. ad quantitatem e f. ratio, componitur ex ratione numeri a. ad numerú e. & ex ratione numeri f. ad numerum b. Ac per diffin. multiplicationis in septimo Elementorum, sicut a. numerus ad ipsum e. sic vnitas ad d. Ac sicut f. numerus ad ipsum b. sic c. ad vnitaté. Et ratio quátitatis c d. ad positam 50. ponitur ex ratione numeri c. ad vnitatem, & ex ratione vnitatis ad numerú d. Propterea, per æquá proportioné, ratio quátitatis a b. diuisę, ad quantitatem e f. prouenienté, erit, sicut ratio c d. diuidentis ad positam. Ergo, per diffin. diuisionis, ex diuisione quantitatis a b. in quantitatem c d. prouenit quátitas e f. quod est propositum. Quod si propositarum quantitatum altera vno tantùm significetur numero, tunc supplendus est ei denominator per vnitatem: vt in præmissis faciendum præcepimus. Etsi quantitatum altera vel vtraque sint multiplices ad positam, aut super particulares,

seu

ſeu ſuperpartientes, redigantur ſingulæ ad ſuas partes. Ita quidē, vt ſingulæ per numeratorē & denominatorē expreſſæ ad prędicti praxim & demonſtrationē accommodentur.

PROPOSITIO 10ª.

Omnis additio & omnis ſubtractio in quantitatibus cognitis irrationalibus fieri poteſt per terminos plus & minus. Namq; quātitates, quarū ſola quadrata, vel quarū ſoli cubi, vel quarū ſola ſecunda quadrata ſunt cognita, vt plurimum neq; coniungi poſſunt, niſi per terminos binomiorum: neq; altera ſubtrahi ab altera, niſi per terminos reſiduorum, vt ſi iungendæ ſint duæ quantitates r. 3. & r. 2. ſtatim dicā, earū aggregatum eſſe r. 3. p° r. 2. Si vero hæc ab illa ſubtrahenda ſit, ilicet reſpondebo, reſiduum poſt ſubtractionem eſſe r. 3. m̄. r. 2 Quando tamen ad inuicem cōmenſurabiles fuerint, poſſunt ad vnū nomē, tā in additione, q̄ in ſubtractione regi, vt poſtea docebimus. Illud tamen in binomijs, reſiduiſq; ſic prolatis, nunquàm non licet comperire quadratum; cuius radix ſit ipſum binomiale aggregatum, ſiue reſiduum, qđ p additionē, ſiue ſubtractione querendū proponitur. Verùm tale quadratū non niſi p duo nomina poteſt proferri, qn̄ propoſitæ quantitates fuerint incōmenſurabiles: vt poſtea per exēpla declarabimus, regulas ſingulas tradentes.

PROPOSITIO 11ª.

a		b
2		3
c	e	d
4	6	9
g	f	h
16	36	81
	k	
	1296	

Duas quantitates propoſitas, quarum vel quadrata tantùm, vel cubi tantùm, vel ſecunda quadrata tantùm cognita ſupponuntur, inuicem multiplicare. Sunto duæ quantitates a b. quarum quadrata c d. tantùm cognita ſupponuntur: ſi iubear a. in b. multiplicare, id faciam per quadrata. Sit enim ipſarum a b. productum e. quod cum rationale non ſit, exiſtentibus a b. inuicem incōmenſurabilibus, & perinde non ſemper poſſit exprimi numero; quærendum eſt per eius quadratum, quod ſemper rationale eſt, ſic. Multiplico, per 8ª huius, c. in d. & proueniat f. Aio igitur, ꝙ f. eſt quadratum producti quæſiti, hoc eſt ipſius e. Quod ſic oſtendo. Qm̄ a. multiplicans ſe ipſam facit c. & multiplicās ipſum b. facit e. erit ideo, per primā 6ⁱ Euclidis, ſicut a. ad b. ſic c. ad e. Et ſimiliter, qm̄ b. multiplicans ſe ipſam, facit d. & multiplicans ipſam a. facit e. erit ſicut a. ad b. ſic e. ad d. Igitur c e d. ſunt continue proportionales. Quare per 15ª ſexti, quod fit ex c. in d. ſcilicet f. æquū eſt quadrato, qđ ex e. qđ erat demōſtrandū. Si cōtingat igitur ipſum f. productum eſſe quadratū

numerum,

numerũ: quod tũc fit, qñ a b. sunt inuicẽ cõmẽsurabiles: tũc ipsum e. productum rationale est: quãdoquidẽ tunc quadrati nũi f. radix est. Ponantur nunc ipsarum a b. quantitatum quadrata secũda tm̃ rationalia, hoc est, cognita p numeros, quæ sint g. & h. vt scilicet g. sit quadratum ipsius c. atq; h. sit quadratũ ipsius a. Rursum, nunc per istec secunda quadrata vestigabo productũ ipsarũ a b. sic: Multiplico g. in h. per 8[a] hui[9], & proueniat k. Dico itaq; quod k. est quadratũ secũdũ ipsi[9] e. producti, hoc est, quadratũ ipsi[9] f. qđ sic ostendo. Cũ eñ c. in se faciat g. & c. in d. faciat f. erit, per primam sexti, sicut c. ad d. sic g. ad f. Et similiter, quoniam d. in c. facit f. & d. in se facit h. ideo sicut c. ad d. sic f. ad h. Ergo g f h. sunt continue proportionales. Quare per 15[a] sexti, quod fit ex g. in h. scilicet k. est æquum quadrato ipsius f. Quod erat ostendendum. Id idem quoque haud difficilius ostendemus de tertijs, quartis, & quotiescunque quantitatum quadratis in infinitum. Nam quota sunt quadrata quãtitatum multiplicantium, productum ex quadratis, totum quadratum erit à quadrato producti multiplicantiũ. Quod etiã ostẽdit Cãpanus in fine decimi Elementoꝝ. Hoc itaq; pacto multiplicãtur ad inuicẽ quantitates potentia tm̃ rõnales, vel mediales primæ, vel cuiuscũq; ordinis. Veniã nũc ad quantitatẽ cubo tm̃ rationales, hoc est, quarum solùm cubi supponuntur cogniti, quãuis de his nihil Euclides. Sunto, vt prius propositę quãtitates a b. quarũ productũ fuit e. & quarũ quadrata c d. & eorũ productũ f. Ducatˀ a. in c. & fiat l. Itẽ b. in d. & fiat m. Eruntq; per diffin. l m. cubi quantitatem a b. per quos cubos quærimus nunc productũ ipsaꝝ a b. s. ipsum e. Multiplico igitur l. cubũ in m. cubũ, & ꝓueniat n. Aio nũc, ꝙ eñ numer[9] est cub[9] ipsi[9] e. hoc est, ꝙ ipsum e. productũ quæsitũ est radix cubica ipsi[9] n. Qđ sic ostendã. Cũ ex a. in b. fiat e. & ex a. in c. fiat l. erit per primam sexti, sicut b. ad c. sic e. ad l. Item cum ex d. in b. fiat m. & ex d. in c. fiat f. erit similiter. sicut b. ad c. sic iam & m. ad f. Quare fiet sicut m. ad f. sic e. ad l. Et ideo, per decimãquartam sexti, numerus n. qui fit ex l. in m. æqualis ei, quod fit ex e. in f. hoc est, cubo ipsius e. qui videlicet fit ex e. in suum quadratum f. Per diffin. igitur e. est radix cubicum ipsius n. Quod fuit demonstrandum. Hac via multiplicandæ sunt quantitates cubo tantùm cognitæ. Quando autem vna quantitatũ multiplicandaꝝ cognita per se proponitur, alterius aũt vel quadratum, vel cubus,

	1	
a		b
2		3
c	e	d
4	6	9
g	f	h
16	36	81
	k	
	1296	

	1	
a		b
2		3
c	e	d
4	6	9
l	f	m
8	36	27
	n	
		216

vel

vel secundum quadratum tantùm cognitum offertur, tunc capiendum est similiter quadratum, vel cubus, vel secūdum quadratum quantitatis per se cognitæ, & deinde quadratum in quadratum, siue cubus, in cubum, siue secundum quadratum in secundum quadratū multiplicandum est. & sic deinceps pro tertijs, aut quotiescunq; quadratis. Sic & demōstratio dudū memorata procedet, & propositū absoluetur.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd ex ductu quadratorum, siue cuborum, siue secundorum quadratorum, aut sequentium, semper producitur quadratum, siue cubus, siue quadratus secundus producti ex multiplicatione radicum, quarum quadrata, seu cubi, seu secunda, vel sequentia quadrata. Quæ omnia, sicut iam demonstrata sunt, ita per Arithmeticam praxim, tam in quantitabus rationalibus, quàm potentia, siue cubo, tantùm rationalibus, siue medialibus, siue duorum pluriumve nominum, supputando comprobātur, quemadmodum in Arithmeticis quæstionibus per exempla tradidimus.

PROPOSITIO 12ª.

Duabus quantitatibus propositis, quarum quadrata tantùm vel cubi tantùm, vel secunda quadrata tantùm cognita supponuntur; alteram in alteram partiri. Quoniam, per diffinitionem, quando multiplicantur inuicem duæ quantitates, productum ad multiplicatam est, sicut multiplicans ad positam: Iam si multiplicans nunc sit diuidens, ac productum sit diuisum, erit multiplicata, quotiens. Quandoquidem, per diffin. diuisa quantitas ad quotientem est, sicut diuidens ad positum. Itaque diuiso producto in multiplicantem, semper ex diuisione prouenit multiplicans. Quod cum ita sit, absoluemus problema, per descriptionem penitus, ac suppositionem præcedentis propositionis. Sint igitur, sicut in præmissa, propositę quantitates a b. quarū quadrata c d. productum autem e. & ipsarum c d. productum f. Ostensum est ergo, quòd f. est quadratum ipsius e. quòd scilicet f. fit ex ductu c. in d. Igitur ex diuisione ipsius f. in ipsam c. proueniet ipsa d. quod est quadratum ipsius b. prouenientis ex diuisione ipsius e. in ipsam a. Sit igitur, exempli gratia, diuidenda quantitas e. diuidens autem a. & offerantur harum quadrata tantùm, scilicet f. quadratum diuidendæ e. atque c. quadratum diuidentis a. diuidam ipsam f. in ipsam c.

	1		
a		b	
2		3	
c	e	d	
4	6	9	
g	f	h	
16	36	81	
	k		
			1296

ſam c. & proueniet b d. quadratum, ſcilicet ipſius b. quotientis: quoniam ſcilicet ex diuiſione producti in multiplicantem, prouenit multiplicata. Item quoniam ex multiplicatione ipſarum g h. quæ ſunt ſecunda quadrata ipſarum a b. producitur k. ſecundum quadratum ipſius e. producti ex ipſis a b. iam ſimiliter ſi pro diuidenda quantitate e. offeratur ſecundum eius quadratum f. & pro diuidente a. proponatur ſecundum eius quadratum g. tunc diuidam ipſam k. in ipſam g. & prouenit h. ſecundum quadratum ipſius b. quotientis. Nam ex diuiſione producti in multiplicantem, proſilit multiplicata. Demum, quoniam ex multiplicatione cuborum l m. qui ſcilicet ſunt cubi ipſarum a b. producitur n. cubus ipſius e. producti primarij: non aliter, ſi pro quantitate e. partienda detur eius cubus n. & pro diuiſione a. ponatur eius cubus l. tunc partiar cubum ipſum n. in ipſum l. & proueniet m. cubus ipſius b. quotientis. Namque productum in multiplicantem diuiſum, exhibet multiplicatam. Nec ſecus faciendum pro tertijs, ac ſequentibus quadratis, quouſque proceſſerit curioſitas. Quod ſi diuiſor, aut diuidendus numerus ita offerantur, vt alter per ſe notus ſit, alterius verò tantum potentia vel cubus vel ſecundum quadratum cognitum proponatur: tunc par dignitas capienda eſt numeri per ſe cogniti, vt ſcilicet, vel quadratum in quadratum, vel cubum in cubum, vel ſecundum quadratum, in ſecundum quadratum, vel dignitatem quamuis in parem dignitatem partiaris: ſicut in multiplicatione factum eſt. Sic enim & demonſtratio dudum explicata locum habet, & quæſtio finem.

a	b	
2	3	
c	e	d
4	6	9
l	f	m
8	36	27
	n	
	216	

Exempla.

1	1	1	Vnitas
2	3	6	Rad.
4	9	36	□
8	27	216	C
16	81	1296	□□

COROLLARIVM.

Ex quibus manifeſtum eſt, quòd ex diuiſione quadrati, in quadratum, ſiue cubi in cubum, ſiue ſecundi quadrati in ſecundum quadratum, ſemper prouenit quadratus, ſeu cubus, ſeu ſecundus quadratus illius quotientis, quod ex diuiſione radicis in radicem, quarum ſunt quadrata, vel cubi, vel ſecunda quadrata, proueniebat. Quod corollarium ſequitur ſimiliter ex præcedentis corollario, ſicut propoſitio ex propoſitione naſcebatur, per ipſas multiplicationis & diuiſionis diffinitiones.

PROPOSITIO 13ª.

Propoſitarum duarum quantitatum per potentias cognitas, aut per cubos tantùm datos, congeriem, aut exceſſum veſtigare. Sunto duæ quantitates a b. quarum quadrata c d. cognita ſint. Volo earum congeriem pronunciare. Per vndecimam huius, multiplico a in b. per nota ipſarum quadrata c d. & proueniat e. Huius duplum

r. 3. a	b r. 12
c	d
3	12
e	
6	
f	
12	

duplum sit f. Sumo igitur aggregatum ipsarum c d f. dico enim quòd tale aggregatum est quadratum congeriei quæsitæ. Nam per 4ª secundi Elementorum, aggregatum ex duobus quadratis, duploq; producti radicũ, quarum sunt quadrata, conficiunt quadratum congeriei radicum. Item sunto duæ quantitates a b. quarum maior b. & earum quadrata sint c d. Volo subtrahere ipsam a. ab ipsa b. Per 11ª huius, multiplico a. in b. per earũ potentias c d. & proueniat e. Huius duplum sit f. quod subtraho ad aggregato ipsarum c d. & residuum sit g. Dico igitur, quòd g. est quadratum eius quantitatis, quæ relinquitur post subtractionem ipsius a. ab ipsa b. Nam per 7ª secundi Elementorum, quadratum quãtitatis, à qua fit subtractio, vnà cum quadrato subtractæ, sumptum æquale est quadrato residui vnà cum duplo eius, quod fit à tota in subtractam. Quam ob rem, si tale duplum subtrahatur ab aggregato quadratorum totius & subtractæ, superest quadratum residui. Vbi notandum est, quòd quando duæ quantitates propositæ sunt inuicem commensurabiles, tunc, quoniam ipsę sunt eiusdem speciei: & earum tam congeries, quàm concessus est & eiusdem speciei quantitas. Exempli gratia: siue propositæ quantitates sint potentia tantùm rationales inuicem commensurabiles: tunc earum tam congeries, quàm differentia erit quantitas vnius nominis potentia tantùm rationalis. Si autem propositæ quantitates singulæ sint vnius speciei binomia: & perinde commensurabiles: tunc earum tam congeries, quàm differentia erit eiusdem speciei binomium: Et similiter de reliquis irrationalium speciebus dicendum: Quæ omnia & in decimo Elementorum demonstrantur, & calculo practico comprobantur. Sed regulę in hac propositione assignatæ quantitatibus potentia rationalibus tantùm vsu veniunt: non & ijs, quarum cubi tantùm, aut quarum secunda quadrata tantùm cognita offeruntur. Sed pro vniuersis quantitatibus, tam potentia tantùm, quàm cubo tantùm, quamque secundo quadrato vel quotacunque potentia tantùm cognitis, dabimus hìc vnicam & auream regulam, quam hìc simul trademus & demonstrabimus. Sit a. magnitudo posita, quæ denominatur ab vnitate. b c. duæ magnitunes datæ. Sit d. quadratum ipsius b. & e. quadratum ipsius c. Itẽ f. cubus ex b. & g. cubus ex c. Et tunc si secetur c in b. & proueniat h. Item e. in d. & proueniat k. Item g. in f. & proueniat l. erũt iam sicut a b d. & sicut ipso a c e g. ita & ipse a h k l. per diffinitionem quadratorum, & cuborum, & per diffinitionem diuisionis continuè proportionales. Quare per diffinitionem h. radix k. quadratum

Aurea regula.

a	b
r.3.	r.27.
c	d
3	27
e	
9	
f	
18	
g	
12	

quadratum & l.cubus talis radix erunt. Quibus cõſideratis, ſi velim aggregare quantitates b c. per earum quadrata d e. vel per earum cubos f g. ponam m. æqualem aggregatum ipſarum a h. & faciam n. quadratũ ipſius m. & eiuſdem m. cubum o. Mox ducam d. in n. & proueniat p. Item ducã f. in o. & proueniat q. Aio tũc, quod p. erit quadratum totius b c. quodq; q. erit cubus eiuſdem b c. totius. Et ſic habeo tã per quadratos, q̃ per cubos aggregatũ ipſarũ b c. Hoc eſt, habeo tã quadratũ, q̃ cubũ talis aggregati, qñ aliter in notitiã non venit. Atq; ita deinceps fiet per ſecunda & quotacunq; quadrata: Quod ſic oſtẽditur. Cũ, per diffi. diuiſionis ſit ſicut c. ad b. ſic h. ad a. erit coniunctum totum c b. ad ipſum b. ſicut totũ h a. ad ipſum a. hoc eſt, c b. ad ipſum b. ſicut m. ad a. Quare per 15ª ſexti Euclid. qđ fit ex a. in b c. hoc eſt, ipſum aggregatũ b c. æquale erit ei, quod fit ex b. in m. Itaq; cũ ex b. in m. hoc eſt, ex radice in radicem producatur totũ b c. iã, per corollariũ vndecimæ huius, ex d. in n hoc eſt, ex quadrato in quadratũ producetur quadratũ totius b c. qđ fuit p. & ex f. in o. hoc eſt, ex cubo in cubum, producetur cubus totius b c. qui fuit q. quod erat demonſtrandum. Et ſimiliter per eadẽ omnino, idipſum oſtẽdetur de ſecundis quadratis, cæteriſq; dignitatibus magnitudinum. Quod ſi velim ſubtrahere quantitatem b. de tota b c. per quadrata earum d. & p. tunc diuidã quadratũ ipſius b c. ſcilicet ipſam p. per quadratũ ipſius b. ſcilicet per ipſam d. Et proueniet ex iã demonſtratis, ipſa n. cuius radix quadrata eſt m. A qua ſubtraho a. vnitatem. & ſupererit h. cuius quadratũ, ſcilicet ipſam k. duco in d. quadratũ, ſcilicet ipſius b. ſubtrahendæ: & proueniet e. quod ex quadratũ ipſius c. quæ ſupereſt poſt ſubtractionẽ ipſius b. à tota b c. ſic per quadrata ſubtractæ & eius, à qua fit ſubtractio, habeo quadratum relictæ. Eadem quoq; ſubtractio fiet per cubos quantitatum ſcilicet per f. & q. ſic. Dimidã cubũ ipſius b c. ſcilicet q. in cubum ipſius b. ſcilicet f. & proueniet ex demonſtratis ipſa o. cuius radix cubica eſt m. De qua minuo a. vnitatẽ, & relinquetur h. cuius cubum l. duco in f. cubũ ipſius b. ſubtrahendæ: & proueniet g. cubus ipſius c. relictæ poſt dictam ac propoſitam ſubtractionem. Et per eandem idipſum in ſecundis quadratis cæteriſque deinceps eueniet. Quæ quidem regula, quoniam communis eſt vniuerſis in infinitum quantitatum dignitatibus, à nemine hactenus animaduerſa, & demonſtrata, merita aurea fuit appellanda.

b	c	h	m
2	3	1½	2½
d	e	k	n
4	9	2¼	6¼
f	g	l	o
8	27	3⅜	15⅝

a

p 25 — q 125

a 1; b 2, c 6, h 3, m 4; d 4, e 36, k 9, n 16; f 8, g 216, k 27, o 64; p 64, q 512

PROPOSITIO 14.

c.	8.		
d.	2.		
a.	3.	5.	b
e.	9.	25.	f
g.	27.	125.	h
k.	81.	625.	l.
t			x
m.	18	50.	n
p.	54.	250.	q
r.	162.	1250.	s
	1.	1.	
	8.	2.	d.R.
	64.	4.	□.
	512.	8.	Cub.
	4096.	16.	□□
y.	18.	1024.	8192.
z.	8.	16.	32.

Duas propositas quantitates potentia tantùm, vel cubo tantùm, vel secundo quadrato tantùm rationales, inuicem commensurabiles inuicem coniungere: vel alteram ab altera subtrahere. Quoniam duæ quantitates commensurabiles inuicem supponuntur, erunt sicut numerus ad numerum: sint ergo sicut numerus a. ad numerum b. quarum maior b. & horum numerorum aggregatum sit c. differentia verò d. Itē ipsorum a b. quadrati sint e f. cubi g h. quadrati secundi k l. Quantitates autem propositæ, si potentia tantū sint rationales, sint earum potentiæ seu quadrata m n. Si autem cubo tantùm rationales, earum cubi sint p q. si tandem quadrato secundo rationales, earum quadrata secunda sint r s. Ipsæ autem quantitates sint t x. & quoniam t x. sunt adinuicem sicut numeri a b. ad inuicem, necesse est, vt & m n. ipsis e f. & ipsi p q. ipsis g h. nec non ipsi r s. ipsis k l. sint proportionales. Quoniam, scilicet quantitatum proportionalium, tam quadrata adinuicem, quàm cubi adinuicem, & quàm secunda quadrata ad inuicem & deinde pares dignitates semper proportionales sunt; propterea videlicet, quòd quadrata duplicant, cubi triplicant, quadrata secunda quadruplicant, & sic deinceps proportionem radicum. Hinc sequitur, quoniam per coniunctam, & euersam proportionem, sicut est c. numerus ad d. numerum, aggregatum scilicet a b. ad eorum differentiam, sic est aggregatum quantitatum t x. ad earum differentiam: Idcirco & talium aggregatorum quadrata, talium differentiarum quadratis, & cubi cubis, & secūda quadrata secundis quadratis proportionalia erunt & deinceps sequentia. Vnde sicut est m. numerus ad e. numerum: siue sicut n. numerus ad f. numerum, hoc est, sicut quadrata singularum quantitatum t x. ad quadratos singulos numerorum a b. sic erit quadratum aggregati quātitatum t x. ad quadratum ipsius c. nec non sic erit quadratum differentiæ quantitatum t x. ad quadratum ipsius d. idemque de cubis, & de secundis quadratis dicendū. Quoniam igitur quantitates t x. notæ sunt per quadrata m n. tantum tunc sicut est m. ad e, sic sit y. numerus ad quadratum ipsius c. Item sic sit z. numerus ad quadratum ipsius d. Nam ex iam demonstratis y. numerus erit quadratum aggregati ipsarum t x. & z. numerus erit quadratum differentiæ ipsarum t x. Sic notescit per quadrata tam congeries, quàm excessus propositarum quantitatum. Quoniam autem quantitates t x. cubo tantum sunt rationales: tunc similiter quæretur earam tam congeries, quàm excessus per cubos; Si demum quadrato secundo tantùm rationales; tunc talis congeries & excessus per secunda quadrata notificabitur.

COROL-

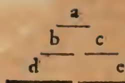
COROLLARIVM.

Ex quibus manifestum est, huiusmodi duarum quantitatum tam aggregatum, quàm differentia, semper est quantitas vnius nominis & vtrique ipsarum commensurabilis.

PROPOSITIO 15ª.

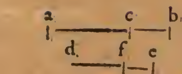
Duarum quantitatum plurium nominum, aggregatum, aut differentiam vestigare. Quando nomina quantitatum sunt ad inuicem incõmensurabilia: tunc congregatio haud aliter fieri potest, quàm aggregatis membris per aduerbium Plus: nec etiam dr̃a aliter proferri, quàm per aduerbiũ Minus: sicut ostendit Euclides in decimo, tam de binomijs, quàm de residuis. Vbi verò fuerint duo nomina inuicem cõmensurabilia: tunc ea, per præcedentem, coniuncta conflant vnam quantitatem, & ideo redigenda sunt ad vnũ nomen in additione. Quod si minor à maiori subtrahatur, superest quantitas vnius nominis, in subtractione. Semper igitur duo nomina, quæ in additione, vel subtractione ad vnum redigi possunt, redigenda sunt, vt quàm paucissimis nominibus siue aggregatum, siue differentiam proferamus. Et in additione hoc semper attẽdendũ, quòd nomina per Plus geminata, Plus conficiunt: Per Minus verò notata, Minus. tantum, inquam, Plus, seu tantum Minus, quantũ coniuncta conflant. Quòd si nominum alterũ per plus, alterũ per min⁹ notetur, tunc eorũ excessus adijciendus, aut subtrahendus erit summæ: adijciendus quidẽ, qñ nomen per plus notatũ, maius est; subtrahendus verò, cum maius est reliquum nomen. Vnde si nomina contrarijs titulis insignita, fuerint æqualia, tunc nihil conflant: nam quod inde adijcitur, hinc subtrahitur, & ita summa intacta permittetur. In subtractione verò, si nominum vtrunque per plus notetur, supererit differentia nominũ per plus qdẽ notanda, cum illud nomen à quo fit subtractio mai⁹ est: per Minus vero inscribenda, cum subtrahendũ nomen maius est. Quando aũt nomina æqualia, nil restat. Quòd si ambo nomina per minus notata sint, similiter supererit excessus nominum; verùm per Plus notandus, cum maius nominum erat subtrahendum: per minus autẽ inscribendus, quando reliquum nomen maius fuerit Nam æqualitas eorum rursum nihil residuat. Demum, si nominum alterum per Plus, alterum per Minus inscribatur: tũc eorum aggregatum pro relicto subtractionis subscribendũ est cum aduerbio Plus, vel Minus, cum quo scilicet notabatur nomẽ, à quo fit subtractio. Quæ præcepta ita sunt in triuialibus scholis trita, & per conceptum animi cognita, vt demonstratione non egeant. Igitur ad reliqua transeundum.

PROPOSITIO 16ª.



Quantitatem vnius nominis in quantitatem duorum aut plurium nominum multiplicare. Quantitas vnius nominis ſit a. binominis autem quantitas b c. ſub duobus nominibus b. & c. prolata. Oportet multiplicare a. in b c. Multiplico per vndecimam huius, quantitatem a. in nomen b. & fiat d. Item multiplico, per eandem, a. in nomen c. & fiat e. Dico igitur, quòd quantitas conflata ex nominibus d e. eſt productum quod fit ex multiplicatione ipſi⁹ a. in ipſam b c. Nam, per ſecundi Elementorum primam, quæ fiũt ex ductu vnius quantitatis in parte propoſitæ quantitatis pariter accepta conficiunt illud, quod fit ex dicta quantitate in totam propoſitam. Itaque d e. productum eſt ex multiplicatione ipſius a. in ipſam b c. factum: quod quærebatur.

PRÆAMBVLVM.



Verùm in multiplicationibus binomiorum ac reſiduorum, hoc eſt prænotandum, quòd ſi nomina multiplicanda inſcribantur per Plus aut per Minus vtraque, tunc productum ex eorum multiplicatione factum inſcribendum erit per plus: ſi vero alterum nominum per Plus, alterum per Minus notetur, productum per minus notandum erit. Quod ita eſſe, breui demonſtratione arguemus. Sunto dua reſidua, vnum, a b. b c. Alterum d e. e f. cùm enim reſidua ipſa ſint quantitates a c. d f. quę reſtant per abſciſionem minorum nominum à maioribus, illud ſic pronuntiatur a b. minus b c. hoc eſt, quod ſupereſt, ſubtracta quantitate b c. à quantitate a b. aliter enim exprimi non poteſt, cum ſit quantitas irrationalis, per abſciſionem quantitatis à quantitate ſibi incommenſurabili factam relicta: & ſimiliter alterum ſic profertur: d e. minus d f. hoc eſt, quod relinquitur, dempta quantitate e f. à quantitate d e. illud inquam, reſiduum eſt quantitas a c. ſicut dictum eſt, relicta. Hoc autem reſiduum quantitas d f. per ſimilem abſciſionem remanens. Quæ cum aliter, quàm per nominum, ex quorum abſciſione generantur, hoc eſt, quorum exceſſus ſunt, proferri nequeant: iam ſi alterum in alterum multiplicandum erit; talis multiplicatio non niſi per nominum multiplicationem fieri poterit. Si igitur reſiduum a b. b c. multiplicandum eſt in reſiduum d e. e f. non aliter multiplicatio fieri poteſt, quàm multiplicando hæc nomina ſingula in illa ſingula: vnde fiet quadruplex multiplicatio, prima ſcilicet a b. in d e. Se-

a b. d e. { a c. d f. + / a c. e f. plus + / b c. d f. plus + / b c. d f. plus. = }

a b. e f { a c. e f. Minus + / b c. e f. Min⁹ — }

d e. b c { b c. d e. Min⁹ + / b c. e f. Min⁹ — }

d e. Secunda a b. in e f. Tertia d e. in b c. Quarta b c. in e f. Harum prima, per primam secundi Elementorum Euclidis, continet quatuor multiplicationes se ipsam integrantes, scilicet a c. in d f. a c. in e f. b c. in d f. b c. in e f. Secunda continet duas multiplicationes se ipsam perficientes, scilicet a c. in e f. & b c. in e f. Tertia item duas, ex quibus componitur, scilicet b c. in d f. b c. in e f. Quoniam, scilicet producta partium integrant productum integrorum. Quarta verò vnica est, scilicet b c. in e f. quoniam fit ex nominibus indiuisis: & cum prædictis octo posita facit nouem multiplicationes. Productum autem quæsitum est, quod fit ex multiplicatione a c. in d f. Quod haberi non potest, nisi paractis dictis quatuor multiplicationibus, quæ continent nouem ductus. Ex quibus consuendum sit solum illud quod fit ex a c. in d f. necesse est cætera octo producta esse abijcienda: quod fieri non potest nisi dimidium eorum notetur per plus, ac reliquum dimidium per minus; atque ita alterum altero repensante, summa quęsita, quæ fit ex a c. in d f. seruentur intacta. Sed ex dictis cæteris octo productis, tria prima multiplicationis, scilicet quę fiunt ex a c. in e f. ex b c. in d f & ex b c. in e f. inscribi debent per aduerbium Plus, quoniam sunt membra primæ multiplicationis, quæ fit ex nominibus a b. d e. per idem aduerbium notatis. Duo autem producta secūdæ multiplicationis, ex a c. in e f. & b c. in e f. notanda per aduerbium Minus: quoniam sunt membra secundæ multiplicationibus, quę fit ex nominibus a b. e f. quorum alterum per aduerbium Minus inscribitur. Duo quoque producta tertiæ multiplicationis, ex b c. in d f. & ex b c. in e f. similiter per aduerbium Minus notata intelliguntur, quoniam tertia multiplicatio quorum membra sunt constat ex nominibus, d e. b c. quorum alterum per minus notatur. Octauum igitur productum, quod fit ex b c. in e f. nominibus inscriptis per minus; necesse est, vt inscribatur per Plus: atque ita fiant quatuor producta inscripta per Plus, & totidem producta paria inscripta per Minus: & perinde tantum his minuentibus, quantum illa superaddunt, Summa quæsita, quæ fit ex a c. in d f. intacta permaneat. Constat igitur, quòd ex ductu nominum per aduerbium, Minus, notatorum producitur quantitas per aduerbium, plus, notanda. Sed illud exemplum satis esse debet, quòd plus in plus multiplicatum, siue minus in minus, omnino producit plus: quemadmodum affirmatio affirmationis affirmat, & negatio negationis affirmat similiter. Item sicut affirmatio negationis, siue negatio affirmationis negat: Ita

b c. e f. } b c. e f. Pl.—

ſiue Plus in Minus, ſiue Minus in Plus multiplicatum producit Minus. Potes exemplificare regulam & comprobare demonſtrationem per numeros rationales, vt ſic ſingulæ nouem multiplicationes diſtinctæ appareant: & facilius omnia intelligantur.

PROPOSITIO 17ª.

Duas propoſitas quantitates, ſingulas duorum, aut plurium nominum, inuicem multiplicare. Proponatur binomium a b. ex duobus nominibus a. & b. multiplicandum in binomium c d. ex duobus nominibus c. & d. compoſitum: ſiue illa ſint reſidua ſingula binis nominibus expreſſa, ſiue alterum Binomium, & alterum reſiduum. Multiplicētur, per vndecimam, & per præcedentem, ſingula vnius quantitatis nomina in ſingula alterius nomina, hoc eſt, c. in a. & fiat e. Item c. in b. & fiat f. Item d. in a. & fiat g. Item d. in b. & fiat h. ſeruatis tamen regulis circa inſcriptiones aduerbiorum, Plus, aut Minus, in præcedenti propoſitione traditis. Nam quantitas compacta ex quatuor nominibus e f g h. ſeruatis aduerbiorum terminis, erit, per primam ſecundi Elementorum, productum ex multiplicatione totius a b. in totam c d. quantitatem, proueniens. Illud quoque notando: ſi nomina huiuſmodi poſſunt ad minorem multitudinem redigi, redigantur, per 14ª huius: quod fieri poteſt inter quælibet bina inuicem cōmenſurabilia: Nam per corollarium dictę 14ª talium binorum nominum tam aggregatum, quàm differentia facit quantitatem vnius nominis. Non aliter trinomia, aut quadrinomia multiplicabuntur, ſingula vnius quãtitatis nomina in ſingula alterius, per vndecimam huius, multiplicando: & deinde bina quę ad vnum nomen redigi poſſunt, redigēdo. Quę omnia poteris practico exēplo experiri. Quod nos in quęſtionib⁹ Arithmeticis abũdè fecim⁹.

a b
c d
e f g h

PROPOSITIO 18ª.

Propoſitam quantitatem duorum aut pluriũm nominum, in datam vnius nominis quantitatem partiri. Eſto Binomium quoddam ſiue Reſiduum a b. ex nominibus duobus a. & b. confectum: quod diuidendum ſit per quantitatem c. Diuidatur per duodecimã huius, nomen a. in quantitatem c. & proueniat d. Item diuidatur nomen b. in eadem c. & proueniat e. Iam ex multiplicatione ipſius c. in d. fiat a. & ex multiplicatione ipſius c. in e. conſurget b. Nam diuiſor in quotiētem multiplicatus producit diuiſum. Igitur, per primam

c
a b
d e

primam secundi Elementorum, ex ductu c. in totam d e. fit tota a b. Et quoniam productum diuisum in multiplicantem, exibet multiplicatam: idcirco tota a b. quod est productum, diuisa in ipsam a. multiplicantem, exhibebit ipsam d e. multiplicatam. Itaque d e. est quantitas quotiens ex diuisione proposita proueniens. Similiter faciendum est, si diuidenda quantitas sit trinomium, aut plurium nominum. Sed memento, sicut in antepræmissa per multiplicatione fecimus, ita & in diuisione animaduertere nominum inscriptiones: Nam nomen inscriptũ per aduerbium Plus, si diuidatur per nomen similiter inscriptum: quotiens diuisionis similiter inscribetur. Si autem diuidatur per nomen aduerbio Minus inscriptum, quotiens diuisionis, per Minus inscribetur. Quoniam scilicet, tam Plus multiplicatum in Plus, quàm Minus multiplicatum in Minus, producit Plus, vt in ante præmissa ostendimus. Nomen autem inscriptum per aduerbium, Minus, si diuidatur per nomen similiter notatum, quotiens diuisionis per Plus inscribetur. (quod non vsu venit, quia diuisor vnius nominis semper per plus notatur.) Si autem diuidatur per nomen notatum per Plus, quotiens inscribetur per Minus. Quoniam scilicet in multiplicationibus tam Plus in minus, quàm Minus in Plus multiplicatum, producit Minus. Sicut enim diuisionis demonstratio fit per multiplicationis demonstrationem: ita & diuisionis regulæ & cautiones ex præceptis multiplicationis deriuantur. Quæ sunt etiam triuialibus Magistris notissimæ, & in quęstionibus nostris Arithmeticis affatim per exempla traditæ.

c
a b
d e

PROPOSITIO 19[a]

Propositam duorum aut plurium nominum quantitatem, in datam duorum nominum quantitatem diuidere. Esto quantitas a. duorum, aut plurium nominum: hanc partiri iubemur per binomium b c. cuius nomina sunt b c. Capiatur d e. Residuum eorundem nominum, ex quibus cõponitur b c. hoc est, vt d. nomen, ipsi b. nomini: & e. nomen ipsi c. nomini æquale sit. Si autem b c. diuisor fuerit Residuum duorum nominum: tunc capiatur d e. binomium corũdem nominum: Deinde, per 17[a] præcedentẽ, multiplicetur quãtitas b c. in quantitatem d e. & proueniat quãtitas f. quæ erit quãtitas vnius nominis, per 113[a] vel per 117[a] decimi Eucl. Nã binomium in suum residuũ multiplicatũ producit quãtitatẽ rationalẽ. Itẽ per 17[a] præmissam multiplicetur a. in d e. & proueniat g h. Eritq; per primã sexti Euclid. sicut b c. ad ipsam a. sic quantitas f. ad ipsam g h. Diuidatur itaque, per præcedentẽ, quantitas g h. in ipsam f. & proueniat k l. Dico itaque, quòd

b c a
d e
f g h
k l

k l. est

k l. est quantitas, quæ prouenit ex diuisione ipsius a. in ipsam b c. Nam cùm g h. diuidatur in f. & proueniat k l. iam, per diffin. diuisionis, erit, sicut g k. ad ipsam k l. diuisa scilicet ad quotientem, sic f. diuidens ad positam. Et permutatim sicut g h. ad ipsam f. sic & k l. ad positam. Verùm fuit g h. ad ipsam f. conuersim sicut a. ad ipsam b c. Ergo & a. ad ipsam b c. sicut k l. ad positam. Et permutatim a. diuisa ad ipsam k l. sicut b c. diuidens ad positam. Quare, per diffin. diuisionis, k l. quantitas est, quæ prouenit ex diuisione ipsius a. in ipsam b c. quæ vestiganda proponebatur. Quòd si diuisor esset trium nominum: oporteret geminari multiplicationem, vt productum tandem proueniat vnius nominis: & diuidendam per eundem multiplicatorem multiplicari: & deinde productum per productum diuidendum.

PROPOSITIO 20ª.

a b

Si quantitas qualibet in duo segmenta diuidatur; id quod fit ex vtrolibet assumpto segmento in quadratum totius, æquum erit his duobus, scilicet, quæ fiunt ex vtraque sectionum in quadratum reliquæ, & ei quod fit ex quadrato assumpti segmenti in totam. Sit quantitas quælibet, vtcunque in duo diuisa, scilicet in a. & b. Dico, quòd id, quod fit ex a. in quadratum a b. æquum erit his, scilicet ei, quod fit ex a. in quadratum b. & ei, quod fit ex b. in quadratum a. eique, quod fit ex quadrato a. in totam a b. Quod sic ostendam. Per quartam secundi Euclidis, quadratum a b. est æquale his, scilicet quadrato b. & ei quod fit ex a. in b. eique quod fit ex a. in a b. Ergò propter æquam vtrobique multiplicationem, quod fit ex a. in quadratum a b. æquale erit his, scilicet ei, quod fit ex a. in quadratum b. cum eo, quod fit ex a. in productum ex a. in b. atque cum eo, quod fit ex a. in productum ex a. in totam a b. Sed id, quod fit ex a. in productum ex a. in b. æquum est ei, quod fit ex quadrato a. in b. Illud autem, quod fit ex a. in productum ex a. in totam a b. æquum est ei, quod fit ex quadrato a. in totam a b. Sunt enim eadem solida, quandoquidem sub tribus iisdem lateribus. Igitur & id, quòd fit ex a. in quadratum a b. æquum erit his, scilicet ei, quòd fit ex a. in quadratum b. & ei, quod fit ex quadrato a. in b. eique quod fit ex quadrato a. in totam a b. Quod fuit demonstrandum.

per 4ª secundi.

□. ab { □. b. / ▭. a. b / ▭. a. a b }

Igitur mltcās singula p a

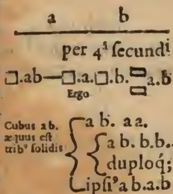
solidum. a a b ab æqu. est sub solidis sc: { a.b.b / a.a. b / a.a.ab }

Quod est ꝑpositū

PROPOSITIO 21ª.

Si quantitas qualibet in duo segmenta secetur: Cubus, qui ex tota, æquum erit his, scilicet duobus cubis sectionum, & triplo eius, quod fit

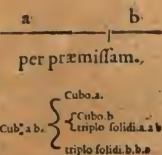
fit ex quadrato vtriusque in reliquam. Sit a b. quantitas, vtrunq; in duo diuisa, scilicet in a. & in b. Dico, quòd cubus totius a b. æqualis erit his, scilicet cubo ipsius a. & cubo ipsius b. & triplo eius, quod fit ex quadrato a. in b. necnon & triplo eius, quod fit ex quadrato b in a. Quod sic ostendam. Per quartam secundi Elementorum, quadratus totius a b. est æquum his, scilicet quadrato ipsius a. quadrato ipsius b. & duplo eius, quod fit ex a. in b. Ergo, propter æquam vtrobique multiplicationem, cubus a b. æqualis erit his, scilicet ei, quod ex a b. in quadratum ipsius a. & ei quod ex a b. in quadratum ipsius b. & duplo eius, quod ex a b. in productum ex a. in b. Sed per primam secundi Elementorum, quod fit ex quadrato ipsius a. in a b. æquum est his, scilicet eis quod fit ex quadrato ipsius a. in a. scilicet cubo ipsius a. & ei quòd fit ex quadrato ipsius a. in b. Illud autem, quod fit ex quadrato ipsius b. in totam a b. æquum est his, scilicet ei, quod fit ex quadrato ipsius b. in b. scilicet cubo ipsius b. & ei, quod fit ex quadrato ipsius b. in a. Item per primam secundi Elementorum, quod fit ex producto ipsarum a b. in totũ a b. ęquũ est his scilicet ei quod fit ex producto ipsarum a b. in a. & ei, quod fit ex eodem producto in b. Sed quod fit ex producto ipsarum a b. in a. æquũ est ei, quod fit ex quadrato ipsius a. in b. Illud autem, quod fit ex producto ipsarum a b. in b. æquum est ei, quod fit ex quadrato ipsius b. in a. Ergo quod fit ex producto ipsarum a b. in totã a b. æquum erit his, scilicet ei, quod fit ex quadrato ipsius a. in b. & ei, quod fit ex quadrato ipsius b. in a. Quare & duplum eius, quod fit ex produto ipsarum a b. in totam a b. æquum erit his, scilicet duplo eius, quod fit ex quadrato ipsius a. in b. & duplo eius quod fit ex quadrato ipsius b. in a. Ergo commutatis ęqualibus, cubus totius a b. ęqualis erit his, scilicet cubo ipsius a. cubo ipsius b. triplo eius, quod fit ex quadrato ipsius a. in b. & triplo eius, quod fit ex quadrato ipsius. b. in a. Quod fuit demonstrãdũ.



sed per pª 2ⁱ
Cub⁹ a. & solidũ a. a. b. æqlia sũt solido a. a. a b.
Item
Cub⁹ b. & solidũ b. b. a æqlia sũt solido. b. b. a b.
Item
Solidũ a. b. a b. æquũ est solidis. a. a. b. atq; b. b. a
Et ideo
duplũ illi⁹, ęquũ duplo horũ.
Igitur
Cub⁹ a b æquatur Cubo a. Cubo b. triplo sol. di. a. a. Triplo so. ...

PROPOSITIO 22ª.

Si quantitas quælibet in duo segmenta dispescatur, cubus totius æqualis erit his, scilicet duobus cubis segmentorum, & triplo solidi, sub tota & singulis segmentis contenti. Esto, vt prius, quantitas a b. vtcunque secta in a. & b. segmenta: Dico, quòd cubus totius a b. ęqualis est his, scilicet cubo ipsius a. Cubo ipsius b. & triplo solidi, cuius latera sunt tota a b. a. & b. Quod sic ostendam. Per præcedentem, cubus totius a b. æqualis est his, scilicet cubo ipsius a. cubo ipsius b. & triplo eius, quod ex quadrato ipsi⁹



ſed per p² 21 ⊐.a.cũ ⊏. a b.ęq̃lia ſunt ſimul ſumpta ⊏.a b.a

Igitur

Solidum a.a.b.cũ ſolid.b.b.a. ęqualia ſunt ſolido a b.a b.

Quare & Tripla illorũ ęq̃lia triplo hui⁹. Ergo. Cub⁹ a b. { Cubo. a. { Cubo.b triplo ſolidi. a b. a. b.

Quod eſt ꝓpoſitum.

a.in b.ac triplo eius, quod ex quadrato ipſius b.in a. Sed per primam ſecũdi Euclidis,quadratum ipſius a.cum eo quod ex a. in b. ſimul ęqualia ſunt ei quod ex a b. in a. Et per eandem , quod fit ex quadrato ipſius a.in b. vnà cum eo quod fit ex a b.in b.æquale eſt ei, quod ex producto totius a b. & a.in b. hoc eſt,ſolido trium laterũ a b. a. b. Atque, quod ex producto totius a b. in b.æquale eſt ei, quod ex quadrato ipſius b. in a. hoc eſt , ſolido trium laterum a. b b. Igitur , quod ex quadrato ipſius a. in b. vnà cum eo, quod ex quadrato ipſius b. in a. æqualia ſunt ei , quod ex producto ipſius a b. & a. in b. hoc eſt ſolido trium laterum a b. a. & b. Quare & triplum illius, æquale triplo huius. Ergo cubus totius a b. æqualis erit his , ſcilicet cubo ipſius a.cubo ipſius b. & triplo ſolidi, cuius latera ſunt a b. a. b. Quod erat demonſtrandum.

Propositio 23ᵃ.

a	b	c	d
16	24	36	54

e	f
256	576

g: 13824

h: 13824

Si fuerint duo numeri in proportione cuborum numerorum, qui fiet ex vno eorum in quadratũ reliqui, cubus erit. Sunto duo ſolidi numeri ſimiles a d. tales enim vt in octauo Elementorum oſtenſum eſt, habent adinuicem rationem , quam cubus numerus ad cubum numerum. Sitque ipſius a. quadratus numerus e. & ex e.in d. fiat g. Aio , quòd g. cubus numerus eſt. Nam per decimam octauam octaui Elementorum , ipſis a d. interſunt duo numeri medij proportionales, qui ſint b c. Sit itaque ipſius b. quadratus ipſe f.& ex b.in f. fiat h.qui cubus erit ipſius b. Oſtendam igitur,quòd g. æqualis eſt ipſi h. hoc modo. Ratio ipſius e. ad ipſum f. per vndecimam octaui , eſt ſicut ratio ipſius a. ad ipſum b. duplicata : quoniam ſcilicet e f. ſunt ipſorum a b. quadrati. Sed ratio b. ad d. eſt rationis a. ad b. duplicata. Igitur, ſicut b. ad d. ſic e. ad f. Quare,per viceſimamſeptimi, qui fit ex d. in e. hoc eſt, ipſe g. æqualis eſt ei , qui fit ex b. in f.hoc eſt ipſi h. Cubus autem fuit h. ipſius b. ergo & g cubus idem erit.Quod eſt propoſitum.

Propositio 24ᵃ.

a	b
r.cu.3.	r.cu.24.

c	d
r.cu.9.	r.cu.576.

e	f
3	24

g	k
r.cu.1728.hoc ē 12.	r.cu.216.ſ.6.

h	l
36	18

m: 81.

Propoſitis duabus quantitatibus cubo tantùm cognitis,eas coniungere : & minorem à maiori ſubtrahere. Sunto propoſitæ magnitudines a b. quarum quadrata a b. & quarum cubi e f. volo eas coniungere per cubos , hoc eſt, comperire cubum totius a b. tanquã vnius magnitudinis. Duco a.in d.& proueniat g.Cui⁹ triplum ſit h. Item duco b. in c. & proueniat k. cuius triplum ſit l. Mox aggregatum ipſorũ e f h l. ſit m. Qui,per 21ᵃ præcedentem, erit cub⁹ totius a b. qui quærebatur. Vnde radix cubica ipſius m. erit

erit aggregatum propositarum magnitudinum a b. Et nota, quòd si cubi, qui cogniti supponuntur, scilicet e f. fuerint in proportione cuborum numerorum; tunc per corollarium 14^m huius, ipsæ magnitudines a b. erunt ad inuicem commensurabiles. Vnde tunc tam g. quàm k. erunt rationales quantitates: quoniam eorum cubi sunt cubi numeri, per præcedentem: quandoquidem producũtur ex quadratis numerorum e f. in proportione cubica existentium, multiplicatis vicissim in ipsos numeros e f. Quamobrem cùm g k. tunc sint rationales, eorum tripli scilicet h l. rationales erunt: cumque e f. per hypothesim sint rationales, quia cubi cogniti, erit aggregatum ex e f h l. hoc est, ipse m. cubus totius a b. numerus rationalis: quare tota quantitas a b. erit cubo cognita, & vnius nominis, sicut corollarium 14^m concludit. Contrà de tota magnitudine a b. cognita per cubum eius m. volo subtrahere magnitudinem a. cuius cubus e. idque per cubos, hoc est reperire cubum relicti, qui est f. Sit itaque n. qui fit ex a b. tota in a. Quod autem fit ex m. in b. sit o. cuius triplum sit r. eritque per antepremissam m. æqualis aggregato ipsorum e f. & r. Itaque ex n. in totam a b. fiat p. & ex m. in a fiat q. Vnde, per primam secundi Euclid. p. æqualis erit aggregato ipsarum o q. Aufero igitur ipsum q. ab ipso p. & supererit o. cuius triplum r. iungo cum e. & aggregatum minuo ab ipso m. & supererit f. cubus scilicet ipsius b. quæsitus, quæ post ipsius a. à tota a b. subtractionem relinquitur. Hic rursum nota, quòd si cubi, qui cogniti supponuntur, scilicet m. & e. fuerint ad inuicem sicut cubi numeri: tunc per corollarium quartædecimæ huius, ipsæ magnitudines a b. tota & a. erunt ad inuicem commensurabiles. Vnde tũc necesse est, cubos ipsarum p q. magnitudinum, esse cubos numeros, & perinde ipsas p q. esse rationales: vnde sequitur, vt earum differentia scilicet o. sit rationalis, eiusque cubus, numerus cubus. Quod sic ostendi potest. Cùm m. & e. sint ad inuicem, sicut cubi numeri: intercedunt ipsis, per decimam octauam octaui duo medij proportionales, qui sint r f. Sit autem ipsius m. quadratus t. & ipsius e quadratus x. fiatque ex m. in e. numerus n. qui fuit cubus magnitudinis n. Et ex m. in n. numerum fiat numerus p. qui fuit cubus magnitudinis p. Itemq; ex n. in e. fiat numerus q. qui fuit cubus magnitudinis q. Dico igitur, quòd p. numerus est cubus ipsius r. Atque quòd q. numerus est cubus ipsius f. Nam, cùm m e. numeri sint ad inuicem, sicut cubi numeri, & eorum quadrati sint t. & x. Iam per præcedentem, tam numerus, qui ex e. in t. quàm numerus qui ex m. in x. producitur, Cubus

numerus

a — r.cu.3. b — r.cu.24.
e — 3 f — 24
m — 81
n — r.cu.243.
o — r.cu.5832. hoc est 18.
r — 54
p — r.cu.15,625. hoc est 25.
q — r.cub.729. hoc est 9.

m. 81. { 3. e. 24. f. 54. r.

m	r	f	e
81	27	9	3
t 6561		u 243	x 9
p 15625		q 729	

numerus erit: cùm autem m. multiplicás se ipsum, faciat t. & multiplicans ipsum n. faciat e. erit, per primam sexti Elementorum, sicut m. ad e. sic t. ad n. Quare per vigesimam septimi, qui fit ex m. in n. scilicet ipse p. æqualis erit ei, qui ex e. in t. qui cubus fuit. Igitur p. cubus, cuius radix r. Similiter cum e. multiplicans se ipsum faciat x. & multiplicans ipsum m. faciat n. Erit sicut e. ad m. sic x. ad n. Quare, qui fit ex e. in n. scilicet ipse q. æqualis erit ei, qui ex m. in x. qui cubus fuit: Igitur q. cubus erit, cuius radix s. Tam igitur p. quàm q. cubus numerus est. Quod fuerat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd si duo numeri seruantes rationem cuborum, singuli multiplicent suum productum, qui ex inde fient, cubi numeri erunt. Quod corollarium, cum præcedenti propositione quàm decentissime locari poterat in arithmeticis Elementis: vt sicut ibi ostensum est, ex ductu similium planorum generari quadratos, ita constet etiam, qua ratione, quoque ductu ex cubis numeris, cubi quoque numeri nascãtur. Sed hæc ideo adducta sunt, vt regula additionis, & subtractionis radicum cubicarum peculiaris: & respondens regulæ in decimatertia huius de quadratis radicibus traditæ, melius notesceret. Quamquàm vlterius illa speculari, quæ ab Euclide neglecta sunt, nimis curiosum esset. Itaque ad reliqua transeamus.

PROPOSITIO 25ª.

Propositæ cuiuspiam quantitatis radicem quadratam extrahere.

Si numerus repræsentans propositam quantitatem sit numerus quadratus, tunc radix eius numeri erit numerus repræsentans radicem quantitatis propositæ, per secundam huius libelli. Si autem proposita quantitas contineat partem, vel partes positæ quantitatis, tunc sit eius numerator a. & denominator b. qui supponantur vel quadrati, vel in ratione quadratorum numerorum: si quadrati, sic capiantur: si in ratione quadratorum numerorum, redigantur ad minimos eiusdem rationis per trigesima nonam septimi: qui sint ipsi a b. eruntque per corollarium secundę octaui, a b. numeri quadrati: Sit ergo ipsius a. radix ipsæ c. numerus: & ipsius b. radix ipsæ d. numerus. Aio igitur, quòd quantitas c d. cuius numerator est c. & denominator d. erit radix quadrata propositæ quantitatis a b. Quod sic constat.

Quoniam

Quòniam numerus c. est radix numeri a. & numerus d. radix numeri b. palam est, quòd numerus c. in se ductus producit numerum a. & numerus d. in se ductus producit numerum b. Quare per regulam multiplicationis in octaua huius traditam, ex quantitate c d. in se ipsam multiplicata producitur quantitas a b. & ideo per diffin. quantitas c d. radix quadrata est ipsius a b. propositæ quantitatis: quod erat demonstrandum. Quando autem numeri reputantes propositam quantitatem non fuerint quadrati numeri, tunc talis quantitati radix quadrata non potest numero notari: est enim solum potentia hoc est quadrato rationalis, & per numerum propositum, tanquam quæsitæ radicis quadratum solummodo præfertur. Exempli gratia: Radix 3. vel Radix 5. Poterimus tamen numero magis ac magis vicino ipsam radicem non quadrati numeri significare. Exempli gratia: sit quantitas proposita ipso a. numero non quadrato significata: cuius volo radicem quadratum prope verum inuenire. Capio numerum quadratum b. proxime maiorem ipso a. numero cuius radix sit c. quæ iam erit prima radix propinqua quæsitę, sed, vt propinquiorē inueniā, subtrahā a. ab ipso b. & residuum sit d. quod partior per duplū ipsius c. per nonā huius: & proueniat quātitas e. quā subtraho ab ipsa c. & superfit f. quod multiplicatum in se facit g. Dico itaq;, quòd f. est radix ipsius a. ꝓpior, quàm c. & ipse g. quadratus vicinior ipsi a. quàm quadratus ipse b. Quod sic patet. Cum c. secetur in e. & f. erit, per quartam secundi elementorum, b. ipsius c. quadratus æqualis his, scilicet quadrato qui ex e. quadrato qui ex f. scilicet g. & duplo eius, quod fit ex e. in f. Et idem quoque b. est æquale ipsi a. vnà cum d. Sed d. est duplum eius, quod fit ex c. hoc est, ex toto e f. in e. igitur b. æqualis erit ipsi a. & duplo eius, quod fit ex e f. in e. Sed duplum eius, quod fit ex e f. in e. est æquale duobus quadratis ipsius e. & duplo eius, quod fit ex e. in f. per tertiam secundi Euclid. bis assumptam. Ergo b. æqualis erit ipsi a. & duobus quadratis ipsius e. & duplo eius, quod fit ex e. in f. fuerat autem & b. æqualis quadrato, quod ex e. & ipsi g. & duplo eius, quod ex e. in f. Igitur quadratum, quod ex e. & ipsum g. & duplum eius, quod ex e. in f. sunt æqualis his, scilicet ipsi a. & duobus quadratis ex e. & duplo eius, quod ex e. in f. Quare, demptis vtrinque quadrato e. & duplo eius, quod ex e. in f. relinquentur inde quidem ipsum g. hinc verò a. vnà cum quadrato ipsius e. inuicem æqualia. Itaque g. excedit ipsam a. in quadrato ipsius e. Et superatur

a.	———	8
b.	—————	9
c.	———	3
d.	—	1
e.	—	$\frac{1}{6}$
f.	———	$2\frac{5}{6}$
g.	—————	$8\frac{1}{36}$

a.	———	8
b.	—————	9
c.	———	3
d.	—	1
e.	—	$\frac{1}{6}$
f.	———	$2\frac{5}{6}$
g.	—————	$8\frac{1}{36}$

ab

ab ipso b. quandoquidem f. superatur a b. radix scilicet à radice. Atque ideo f. erit vicinior radici ipsius a. quàm fuerat c. adhuc tamen maior ea: quandoquidem g. maius ipso a. quadratum quadrato. Similiter autem sicut per ipses b. & c. quadratum & radicem inuenimus f. radicem quæsitę viciniorem quàm fuerat c. Ita rursum per g. & f. quadratum & radicem inueniemus radicem quæsitæ propinquiorem, quàm est f. Et similiter, iterum atque iterum viciniorem, semper tamen aliquanto maiorem, donec excessus redigatur ad fractiunculam atomo ęqualem, ac quãtouis minorem in infinitum, nunquàm tamen ipsi æqualem: quoniam quęsita irrationalis est, & in terminos numerarios non cadit. quæ omnia exercitio practici exempli calculando facile experieris. Poteris & alia via propinquare radici ignotæ sic. sit a. numerus non quadratus, cuius volo prope verum vestigare radicem: assumo ingentem numerum quadratum, vt puta cẽtenariũ, qui sit b. cuius latus c. Multiplico a. in b. & produco d. Quo fit, vt si a. propositus sit exempli gratia 8. ipse d. proueniat 800. cuius radix quidem maior quàm 28. minor, quàm 29. quæ sit e. Et quoniam quadrata sunt in dupla ratione radicum, cum d. numerus sit centuplus ad ipsum a. quadratum, scilicet ad quadratum: iam e. radix ipsius d. erit decupla ad radicem ipsius a. Hoc est, cum d. ad a. sit sicut b. centenarius ad vnitatem: erit e. ad f. sicut b. ad c. vel sicut c. ad vnitatem, hoc est, decuplus. Igitur f. erit decima pars ipsius e. hoc est, maius quàm $2\frac{8}{10}$ minus verò, quàm $2\frac{9}{10}$ & hæc est ipsius a. radix quæsita. Quòd si per centenario assumpsissẽ quadratum numerum maiorem, vt centies centum, per minutiores partes magis vero appropinquassem. magisque si ad calculum millionem quadratum applicassem. Itaq; deinceps in infinitum, licèt verum numerario termino attingi nullatenus possit.

c—10 b—100
a—8 d—800
f—$2\frac{8}{10}\frac{9}{10}$ e—28 29

Propositio 26ᵃ.

Proposita cuiuspiam quantitatis radicem cubicam extrahere.

Si numerus repræsentans propositam quantitatem, sit numerus cubus, tunc radix cubica eius numeri erit numerus repræsentãs propositæ quantitatis radicem, per secũdam huius libelli. Si autem proposita quantitas signetur per duos numeros: tunc sit eius numerator e. & denominator f. qui supponãtur vel cubi numeri vel in ratione cuborum numerorum. Si cubi, sic capiantur: si autem in ratione cuborum, redigantur ad minimos eius rationis, per 39ᵃ septimi, qui sint ipsi e f. eruntque per corollariũ secundæ

c.1 — a.4 — e.8
d.5 — b.3 — f 27

octaui

octaui e f. numeri cubi: sit ergo ipsius e. cubica radix c. numerus, & ipsius f. cubica radix ipse d. numerus. Aio igitur, quòd quantitas c d. cuius numerator c. denominator aũt d. erit radix cubica propositæ quantitatis e f. Quod sic constat. Ducatur c. in se, & fiat a. Item d. in se & fiat b. Eritque per diffin. quantitas a b. quadratum ipsius c d. Cumque ex radicis ductu in suum quadratum proueniat cubus ipsius radicis: iam ex ductu quantitatis c d. in quantitatem a b. proueniet cubus ipsius c d. Sed ex tali ductu quantitatum proueniet quantitas e f. per regulam multiplicationis in octaua huius traditam, quoniam scilicet ex ductu c a. numeratorum fit e. numerator, & ex ductu d b. denominatorũ fit f. denominator: igitur e f. quãtitas est cubus ipsius c d. quantitatis, & perinde c d. radix cubica ipsius e f. propositæ quantitatis quæsita. $1 \quad \frac{2}{3} — \frac{4}{9} — \frac{8}{27}$ Quando autem numeri repræsentantes propositam quantitatem, non fuerint cubi numeri; tunc, sicut in prima propositione dictum est, talis quantitatis cubica radix non erit rationalis, & in numerarios terminos non cadit, nec nisi per cubum profertur, sit radix cubica 7. & ℞. cubica 9. poterimus tamen per numeros magis ac magis ipsi propinquare, sicut in præcedenti pro radice quadrata vestiganda fecimus. Sit enim, exempli gratia, a. quantitas proposita non quidem cubo numero significata, cuius cubicam radicem vestigare iubear, quam non nisi prope, propiusq; tentim accedendo, conijcere possum: sicut in numero non quadrato de quadrata radice faciebam. Sit itaque ipso numero a. proxime superior. b. cubus: cuius radix cubica sit c. Deinde subtraho a. ab ipso b. & residuum sit d. Quod partior per triplum quadrati, quod ex c. & proueniat e. Hoc subtraho ab ipso c. & residuum sit f. cuius cubus esto g. Dico itaque, quòd f. est propinquior radici cubæ ipsius a. quàm erat c. Atque quòd g. cubus est vicinior ipsi a. quàm erat b. Nam, per vigesimam primam huius, cum c. quantitas secetur in ipsas e. & f. erit cubus ipsius c. scilicet ipse b. æqualis his, scilicet cubo ipsius f. qui est g. & cubo ipsius e. & triplo eius quod ex quadrato ipsius e. in f. necnon triplo eius quod ex quadrato ipsius f. in e. Cumque idem b. sit æqualis ipsis a d. simul, atq; d. sit æqualis triplo eius, quod fit ex quadrato ipsius c. in e. & ideo triplo eius, quod fit ex quadrato ipsius e f. in e. propterea b. æqualis erit his, scilicet ipsi a. & triplo eius, quod fit ex quadrato ipsius e f. in e. Sed, per vigesimam

a —— 7
b —— 8
c —— 2
d —— 1
e —— $\frac{1}{12}$
f —— $1\frac{11}{12}$
g —— $7\frac{71}{1728}$

 huius,

huius, quod fit ex quadrato ipsius e f. in e. æquale est his, scilicet ei, quod ex quadrato ipsius f. in e. & ei, quod ex quadrato ipsius e. in f. atq; ei, quòd ex quadrato ipsi⁹ e. in totam e f. Igitur triplum eius, quod ex quadrato ipsius e f. in e. æquale erit his, scilicet triplo eius, quod ex quadrato ipsius f. in e. & triplo eius quod ex quadrato ipsius e. in f. atque triplo eius, quod ex quadrato ipsius e. in e f. Quamobrem ipsa b. erit etiam æqualis his. s. ipsi a. & triplo eius, quod ex quadrato ipsius f. in c. & triplo eius, quod ex ipsius e. quadrato in f. atq; triplo eius, quod ex quadrato ipsius e. in e f. Verùm, per 21 huius, idem b. cubus æqualis est his, scilicet ipsi g. qui cubus est ipsius f. & cubo ipsius e. & triplo eius, quod fit ex quadrato ipsius e. in f. triploque eius, quod ex quadrato ipsius f. in e. Quoniam scilicet e. & f. constituunt ipsam c. radicem ipsius b. Ergo hęc, scilicet ipsa a. triplum eius, quod ex quadrato ipsius f. in e. & triplum eius, quod ex quadrato ipsius e. in f. cũ triplo eius, quod ex quadrato ipsius e. in e f. simul erunt æqualia his simul, scilicet ipsi g. cubo ipsi⁹ f. & cubo ipsius e. & triplo eius, quod ex quadrato e. in f. & triplo eius, quod ex quadrato ipsius f. in e. Demptis igitur vtrinque his, scilicet triplo eius, quod ex quadrato ipsi⁹ e. in f. & triplo eius quod fit ex quadrato ipsius f. in e. supererunt g. & cubus ipsius e. simul æqualia ipsi a. & triplo eius, quod ex quadrato ipsius e. in e f. Itaque g. tanto maior est ipso a. quanto triplum eius quod ex quadrato ipsius e. in e f. siue in c. maius est cubo ipsius e. Maius est enim id, quod ex quadrato ipsius e. in e f. quàm cubus ipsi⁹ e. qui ex quadrato ipsius e. in ipsum e. producitur. Multo magis ergo & triplum eius, quod ex quadrato ipsius e. in e f. seu in c. maius erit cubo ipsius e. Cùm igitur g. sit maior ipso a. minor autem ipso b. quandoquidem f. minor fuit ipsa c. radix radice. erit f. propinquior cubicæ radici ipsius a. quàm fuerat c Adhuc tamẽ f. maior est ipsa quæsita radice cubica ipsius a. quandoquidẽ g. cubus maior, q̃ a. Similiter autem, sicut per b. & c. inuenimus f. radicem viciniorem radici ipsius a. quàm fuerat c. ita rursus per g. & f. inueniemus radicem propiorem radici ipsius a. quàm fuit f. & similiter iterũ, atq; iterũ propinquiorẽ, nũquã tñ in infinitũ punctuale verũ, numerario termino attingẽtes. Quin etiã id ipsum, sicut in quadrata fecim⁹, aliter attẽtabimus sic: Sit a. numerus nõ cubus, cuius velim coniectare cubam radicem. Assumo cubum numerum magnũ, vtputa millenarium, qui

a	7
b	8
c	2
d	1
e	$\frac{1}{12}$
f	$1\frac{11}{12}$
g	$7\frac{71}{1728}$

e	10	b	1000
a	7	d	7000
f	$\frac{9}{16}$	c	19

sit b. cuius radix cubica scilicet denarius sit c. Multiplico ipsum a. in b. & produco d. Quo fit, vt si a. propositus numerus sit 7. iam ipsum productũ d. sit 7000. Cuius radix cubica quidẽ paulò maior est, quàm 19. quæ sit e. & quoniam cubi sunt ad inuicẽ in tripla ratione radicum; propterea cũ d. numerus sit millecupl⁹ ad ipsum a. cub⁹ scilicet ad cubũ: iã e. radix ipsius d. decupla erit ad radicem ipsius a. igitur radix ipsius a. quæ sit f. erit pars decima ipsius e. hoc est, paulò maior, quàm $1\frac{9}{10}$. Quòd si pro millenario assumpsissem cubum maiorem, vtputa millionẽ, vicinior verò fuissem. Itaq; deinceps: nã maior numerus distinctus partes exprimit. quia numerosior: neq; aliter geometrico pũcto accedere licet propter incommensurabilitatem quęsitæ radicis, in nullum numerum cadentis. Hæc de radicum quadratarum, & cubicarũ extractione satis. Nunc ad progressiones veniamus. Nam quemadmodũ datæ quãtitatis quadrata vel cubica radix via giometrica extrahatur in libello Datorũ Theonis docuimus. Illius regulam Euclides in vltima secundi: Huius verò præceptum Philon Byzantius, Apollonius, Archytas, Pappus, Eratosthenes, Menæchmus & alij tradidere: vt Eutotius Ascalonita in commentarijs Archimedis scripsit.

c —— 10 b —— 1000
a —— 7 d —— 7000
f —— $1\frac{9}{10}$ e —— 19

PROPOSITIO 27.

Cùm fuerint quotcunque quantitates per idem crementum seriatim crescentes, ex dimidio numeri ipsarum in congeriem ex prima & vltima multiplicato producitur aggregatum ipsarum omnium. Exempli gratia, sint quinque magnitudines, a b c d e. seriatim & eodem accessu crescentes: sitq; a. minima e. verò maxima. Dico, quòd si dimidium quinarij ducatur in congeriem ipsarum a e. producetur aggregatum ipsarum a b c d e. Ponatur enim totidem magnitudines & singulæ singulis ipsis a b c d e. æquales f g h k l. sed ordine præpostero dispositæ: sic enim fiet, vt, cremento vnius ordinis decrementum alterius repensante, binarum quarumuis vna sit congeries: Vnde vtriusque ordinis aggregatum planus numerus erit sub duobus lateribus contentus: quorum vnũ erit numerus combinationum, scilicet quinarius, alter verò congeries ipsa binarum. Talis autem congeries constat ex minima & maxima. Igitur quinarius in talem congeriem ductus, producet aggregatum vtriusq; ordinis. Quare & dimidium quinarij in eandem congeriem multiplicatum producet aggregatum vnius ordinis. Quod fuit demonstrandũ.

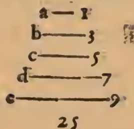
3 a l 11
5 b k 9
7 c h 7
9 d g 5
11 e f 3

5 —— 14 —— 70
$2\frac{1}{2}$ —— 14 —— 35

PROPOSITIO 28ª.

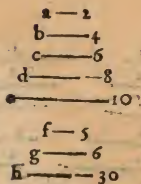
Radicum ab vnitate per ordinem dispositarum, vltima in succedentem multiplicata, producit numerum, cuius dimidium est aggregatum ipsarum radicum omnium. Nam per septimam præcedentis libri tale productum est duplum trianguli collateralis vltimę radicis: triangulus autem est, per diffin. aggregatum omnium radicum vsque ad vltimam inclusiue. Cum ergo dimidium talis producti sit ęquale triangulo, erit & æquale aggregato radicum: Quod est propositum.

PROPOSITIO 29ª.



Numerus multitudinis imparium ab vnitate dispositorum in se ductus, producit aggregatum ipsorum imparium omnium. Exempli gratia, sint quinque impares a b c d e. ab vnitate dispositi: dico, quòd quoniam quinque sunt, quinarius in se ductus producit aggregatum ipsorum quinq; imparium. Nam, per quintamdecimam præcedentis libri, quinq; dicti impares aggregati conficiunt quintum numerum quadratum, qui ex quinario in se ducto producitur. Verum est ergo propositum in omni casu.

PROPOSITIO 30ª.



Numerus multitudinis parium à binario successiue dispositorum, multiplicatus in numerum vnitate maiorem, producit aggregatum ipsorum parium omnium. Exempli gratià, sunto quinq; pares a b c d e. à binario per ordinem dispositi. f. autem sit quinarius numerus ipsorum. g autem numerus vnitate maior, scilicet senarius, & ex f. in g. fiat h. Aio, quòd h. est aggregatum ipsorum a b c d e. parium. Quod sic patet. palam est, quòd in tali exemplo f. est quinta radix, & g. sexta radix: Igitur, per septimam præcedentis libri h. talium radicum productum est numerus parte altera longior sextus: qui per octogesimam quintam dicti libri, est aggregatum ipsius e. paris sexti loci, & omnium præcedentium: quod erat demonstrãdum. Et similiter in oĩ casu constabit propositũ.

PROPOSITIO 31ª.

Si in vno ordine fuerint quotlibet quantitates continue proportionales, & in secundo ordine quantitates vna plures in eadem ratione continue proportionales, ita vt earum differentiæ sint quantitatibus primi ordinis singulæ singulis æquales: tunc differentia primæ & postremæ secundi ordinis æqualis erit aggregato quantitatum primi ordinis. Ponantur in primo ordine quantitates continuę proportionales quot-

nis, vtputa quatuor a b c d. quib' succedat in eadē ꝓportione ipsa e. quanta. Deinde in secūdo ordine vnà plures quātitates. s. quinq; f g h k l. ita cōparatæ, vt dr̄a ipsarū f g. sit æqualis ipsi a. Et differentia ipsarum g h. æqualis ipsi b. & dr̄a ipsarum g k. æqualis ipsi c. & differentia ipsarum k l. æqualis ipsi d. Tunc aio, ꝙ differentia ipsarum f l. erit æqualis aggregato ipsarū a b c d. Patet propositū: qm̄ differentia ipsarum f l. extremarū conficitur ex differentijs quatuor medijs: quæ per hypotesim sunt æquales ipsis quatuor a b c d. quantitatibus. Sed suppositis magnitudinib' primi ordinis: sic inuenietur magnitudines secundi ordinis. Sit ipsarum a b. differentia m. & sicut est m. ad ipsam a. sic sit a. ad f. & sicut est a. ad e. sic sit f. ad l. Vnde sicut ipsis a e. intersunt tres mediæ proportionales: ita & ipsis f l. totidem mediæ proportionales in eadem proportione intererunt. quæ sint g h k. Et, quoniam pp similem proportionem, sicut est a. ad f. sic est differentia ipsarum a b. scilicet m. ad differentiam ipsarū f g. suitq; & m. ad a. sicut a. ad f. ideo m. eandem habebit rationem ad a. & ad differentiam ipsarum f g. æqualis ergo est a. differentiæ ipsarum f g. Sed cum differentiæ seruent continuatam magnitudinū proportionē, propterea tam b. dr̄æ ipsarū g h. q̄ c. differentiæ ipsarum h k. q̄ d. differentiæ ipsarū k l. ęqualis erit. Hinc oritur regula progressionis magnitudinū continue proportionalium. Nam ex m. & a. iam notis, notescit f. deinde ex a. e. & f. nota venit l. cuius & ipsius f. excessus est aggregatum ipsarum a b c d. sicut ostensum est.

8	a	m 4	f
12	b		g 16
18	c		h 24
27	d		k 36
	e		l 54
$40\frac{1}{2}$			81

PROPOSITIO 32ª.

Si secundū duos terminos summantur quotlibet quātitates cōtinue proportionales, quarū extrema multiplicēt ipsi termini: tūc productorū differentia diuisa inter minorū differētiā, exhibet aggregatū ipsarum quantitatum. Sunto duo termini, gratia exēpli, numeri 2. & 5. quorum quadrati 4. & 25. cubi autem 8. & 125. secundi quadrati 16. & 625. quadratis autem intersit medius proportionalis 10. cubis duo medij proportionales 20. & 50. secundis quadratis tres medij proportionales 40. 100. 250. qui singuli producuntur ex ductu terminorum in se, & ad inuicem, & inde in singulos secundi, & tertij ordinis numeros, vt assolet multiplicatorum. In horum tertio ordine sunt quatuor numeri continue proportionales scilicet 8. 20. 50. 125. in quorum extremos 8. & 125. multiplicati termini 2. & 5. producunt 16. & 625.

		1		
	2.		5	
4		10		25
8	20		50	125
16.	40.	100.	250.	625.

1
2 . 5
4 . 10 . 25
8 . 20 . 50 . 125
16. 40. 100. 250. 625

Regula.
625
16
3 | 609 |
203

quorum differentia est 609. Aio, quòd huiusmodi differentia diuisa in differentiam ipsorum 2.& 5. hoc est, in 3. exhibet aggregatum dictorum quatuor numerorum continue proportionalium, scilicet 8. 20. 50. 125. quod sic ostenditur. Quoniam 2. ductus in se, facit 4. ductus in 5. facit 10. Iam idem 2 in 3. quę differentia est ipsorum 2.& 5. producet differentiam ipsorum 4.& 10. productorum: quoniam multiplicator ductus in differentiam multiplicatorum, producit differentiam productorum. Item quoniam 5. in 2. facit 10.& in se facit 25. iam & idem 5. in 3. faciet differentim ipsorum 10.& 25. Simili ratione, quoniam 2. in 4. facit 8. & 5. in 4. facit 20. (propter proportionalitatem numerorum) ideo 4. in differētiam dictam ipsorum 2.& 5. scilicet in 3. faciet differentiam ipsorum 8. & 20. Non aliter deinceps ostendam, ꝙ dicta terminorum 2.& 5. differentia multiplicata in 10. facit differētiam ipsorum 20.& 50. multiplicata quoq; in 25. facit differentiam ipsorum 50. & 125. Quamobrē eadē terminorum differentia multiplicata in aggregatū ipsorum 4. 10. 25. faciet aggregatum trium differentiarū dictarū, scilicet ipsorum 8.& 20. ipsorum 20.& 50. ipsorum 50. & 125. Sed tres tales differentiæ coniunctæ componunt extremorum 8. & 125. differentiam, igitur dicta terminorū differentia multiplicata in aggregatum ipsorum 4. 10. 25. producet differentiam ipsorum 8.& 125. extremorum. Quare & talis extremorum 8.& 125. (quæ sunt producta ex terminis in 4. & 25. multiplicatis) differentia diuisa in terminorum differentiam, exhibebit dictum ipsorum 4. 10. 25. continue proportionalium aggregatum: sicut propositio concludit. Adhuc per eadem omnino demonstrabimus, quòd ipsa terminorū differentia multiplicata in singulos 8. 20. 50. 125. tertij ordinis numeros, producet singulas quatuor sequentis ordinis numerorū differētias: & pinde eadē terminorū dr̄a mľcata in aggregatū ipsorum 8. 20. 50. 125. producet aggregatū dictarum quatuor differentiarū sequentis ordinis: & ideo producet dr̄am duorū extremorū 16.& 625. quæ sunt producta ex ductu terminorum 2. & 5. in ipsos 8. & 125. extremos quatuor continue proportionaliū. Vnde & taliū productoꝝ differentia diuisa in differētiam terminorū, exhibebit aggregatū ipsorum 8. 20. 50. 125. quatuor continue proportionaliū numerorū: quod erat demonstrandū. Similiter pro cæteris terminis, aut proportionibus ostēdam qđ proponitur.

1
3 · 7
9. 21. 49
27. 63. 147. 343
81. 189. 341. 1209. 240

Regula
2401
81
4 | 2320 |
580

PRO-

PROPOSITIO 33ª.

Sicut est quadratus ad duplum suæ radicis, sic est collateralis Triangulus numerus ad sequentem radicem. Exempli gratia, sit a. quinta radix b. autem quintus quadratus numerus: & ipsius a. duplus ipse c. Item d. sexta radix. cumque a. in se faciat ipsum b. Item a. in sequentem radicem d. faciet ipsum e. per diffin. parte altera longiorem sexti loci. Cuius dimidi' sit f. qui per octauam præcedentis libri, erit triangulus quintus. Demonstrandum est ergo, quòd sicut est b. ad ipsum c. sic est f. ad ipsum d. Sic, quoniam a. multiplicans ipsos a d. producit ipsos b e. Iam ideo, per primam sexti Euclidis, erit sicut a. ad ipsum d. sic b. ad ipsum e. & permutatim sic b. ad a. sicut e. ad d. Cumq; a. sit dimidius ipsius c. atque e. dimidius ipsius f. iam, per 23ª quinti Elementorum, erit ex æquali, sicut b ad c. hoc est, quadratus quintus ad suam radicem, f. triangulus quintus, ad d. sextam radicem: quod fuit demonstrandum. & sicut pro quinto loco, ita pro quocunque constabit propositum.

c. 10. —— a. 5. —— b. 25

a. 5

d. 6 —— e. 30. —— f. 15

PROPOSITIO 34ª.

Omnis triãgulus multiplicatus in duplum collateralis radicis, producit aggregatum ex cubo & quadrato collateralibus. Repetita descriptione præmissæ, ostendendum est, quòd f. triangulus quintus multiplicatus in c. duplum ipsius a. radicis quintæ, producit cubi & quadrati quintorum congeriem, hoc modo. Sicut est b. quadratus quintus ad c. duplum suæ radicis a. sic est f. triangulus quintus ad d. sequentem radicẽ, per præcedentem. Cùm verò a. in b. per diffin. faciat cubum quintum: Iam d. vnitate maior, quàm a. in b. faciet congeriem ex cubo tali suoque quadrato. Sed per 15ª sexti, quod fit ex d. in b. æquum est ei, quod fit ex f. in c. siue per 23ª septimi. Igitur f. in c. faciet dictam cubi, quadratique congeriem, quod erat demonstrandum. Et sicut in quinto, ita in quouis loco constabit propositum.

PROPOSITIO 35ª.

Quod fit ex aggregato quotlibet radicum ab vnitate, ordinatarum multiplicato in duplum radicis vltimæ, si iungatur cum ipso radicum aggregato, cõflabit triplum aggregati omnium quadratorum ex dictis radicibus singulis factorum. Nam cum aggregatum, exempli gratia, quinque radicum ab vnitate ordinatarum sit per diffin. quintus triangulus: & aggregatum quinq; quadratorum talium radicũ, sit quinta pyramis

1.	1.
2.	4.
3.	9.
4.	16.
5.	25.
15	55

15 } 150 — { 125, 25

5, 5 } 10

quadrata per diffin. Iam demonſtrandum erit, quòd illud, quod fit ex quinto triangulo in duplum radicis quintę, ſi iungatur cum ipſo triangulo, conſlabit triplum pyramidis quadratæ quintæ. Sed, per præcedentem, id, quod fit ex quinto triangulo, in duplum radicis quintæ, æquum eſt aggregato cubi & quadrati quintorum. igitur demonſtrandum erit, quòd congeries cubi quadrati & trianguli quintorum, æquiualet triplum pyramidis quadratæ quintæ. Quod cum iam oſtenſum ſit in 63ª præcedentis libri: iam conſtat propoſitum. ita non ſolum in quinto, ſed in quouis alio loco demonſtrabitur, quod demonſtrandum proponitur.

3 } 55 } 15 165 15 165

COROLLARIVM.

Hinc regula progreſſionis quadratorum ex radicibus ordinatis factorum conſtat. Quòd ſi numeri progreſſionis propoſitæ ſint ad radices ſingulis ſingulas dupli, tunc quadratorum quæſitorum ſumma, ad quadratorum radicum congeriem erit quadrupla: ſi tripli, nonupla; ſi quadrupli, ſedecupla; ſi quincupli vigecupla quincupla, & ita deinceps: nam quadratorum ratio duplex eſt ad laterum rationem.

PROPOSITIO 36ª.

Si fuerint quotlibet ab vnitate ordinatè radices: quod fit ex aggregato poſtremæ & ſequentis radicum in productum ex eiſdem, duplum ſemper eſt ad congeriem ex cubo quadrato, & triãgulo collateralibus poſtremæ: & perinde ſexcuplum pyramidis quadratæ collateralis, hoc eſt aggregati quadratorum ex radicibus ordinatis productorum. Sint, exempli gratia, quatuor ab vnitate radices, quarum vltª ſit a. eiº quadratus b. Dimidium multitudinis radicum ſit c. Radix ſequens, hoc eſt, quinta ſit d. fiatque ex b. in d. numerus e. & ex d. in c. numerus f. Palam eſt, quòd e. eſt aggregatum ex cubo ipſius a. & ex quadrato eius, hoc eſt, ex b. quandoquidem d. multiplicator eſt vnitate maior quàm a. quodq; per 28ª huius f. eſt triangulus quartus, aggregatumque quatuor radicum. Deinde g. ſit aggregatum ipſarum a. d. radicum: & h. ſit productum ex earundem a. d. multiplicatione, fiatque inde ex g. in h. numerus k. & ſic demonſtrandum erit, quòd numerus k. eſt duplum ad aggregatum ex e f. Quod ſic patet. Numerus g. conſtat ex a. & d. & ideo conſtat ex duplo ipſius a. & ex vnitate. & numerus h. conſtat ex a. & b. per nonam præcedentis libri: quoniam h. eſt parte altera longior quinti loci: Et b. eſt quartus quadratº cuius radix a. Igitur ex a. in a b. fiet e. & ex duplo ipſius a. in h.

c. 2 } f. 10
d. 5 }
a. 4 } b. 16 } e. 80
a. 4 }

g. 9 } k. 180
h. 20 }

in h. fiet duplum ipsius e. Sed ex vnitate in h. fit duplum ipsius f. igitur ex aggregato dupli ipsius a. & vnitatis, hoc est ex g. in h. fiet duplũ totius e f. quod erat demonstrandũ. Quòd enim productũ ex vnitate in h. hoc est ipse h. fit duplũ ipsius f. palã est: Nam f. fit ex c. in d. At ipse h. fit ex a. in d. qui duplus est ipsius c. quoniam scilicet a. est multitudo radicum & c. dimidium talis multitudinis. Cõstat ergo propositum. Sed e f. per pręmissam, est triplum aggregati quadratorum à quatuor radicibus propositis factorum: Ergo k. qui fit ex g. in h. sexcuplus erit aggregati quadratorum, sicut propositio concludit. Quod autem pro quatuor radicibus conclusum est, pro quotcunquę propositis in infinitum demonstrabitur.

COROLLARIVM.

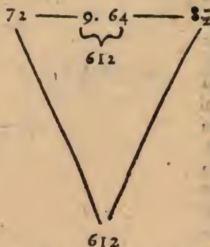
Hinc altera regula elicitur ad habendum cumulum quadratorum à quotcunque ab vnitate ordinatis radicibus factorum. Quod si pro radicibus proponãtur aliæ quantitates secundùm primæ crementum ordinatæ, tunc proportio earum singularum ad singulas radices duplicanda est. & secũdum talem proportionem adaugenda, vel diminuenda erit summa radicum, vt proueniat summa quadratorum propositarum quantitatum.

PROPOSITIO 37ª.

Propositis ab vnitate quotlibet radicibus, si radix proxime sequens multiplicet aggregatum ex quadrato postremæ & ex dimidio ipsius postremæ; producetur triplum summæ quadratorum ipsarum radicum propositarum. Exempli gratia, sunto radices octo dispositæ ab vnitate singulę cum suis quadratis. Radix proxime sequens erit 9. aggregatum ex quadrato postremæ, scilicet 64. & ex dimidio ipsius postremæ scilicet 4. erit 68. Aio igitur, quòd si 9. ducatur in 68. producetur triplum summę talium quadratorum omnium scilicet 612. Quod sic patet. Per 36ª secundi horum arithmeticorum, ex aggregato ipsorum 8. & 9. hoc est postremæ propositarum, & sequentis proxime radicis, hoc est ex 17. in productum earundem scilicet 72. fit sexcuplum summæ dictorum quadratorum. Igitur ex $8\frac{1}{2}$ quod est dimidium dicti aggregati, in 72. fiet triplũ talis summæ. Sed sicut 72. ad 9. sic 68. ad $8\frac{1}{2}$ quare, per vigesimam septimi Elementorũ, quòd fit ex 72. in

1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	4
	68

612. triplum ad 204. quæ est summa quadratorum.



quod per 36a secundi fuit triplum summæ quadratorum dictæ.

$8\frac{1}{2}$ æquale erit ei, quod ex 9. in 68. Igitur ex 9. in 68. fiet triplum dictæ summæ quadratorum: quod erat demonstrandum. Quòd autem 72. ad 9. sit sicut 68. ad $8\frac{1}{2}$ patet. nam 72. ad 9. est octuplus ex diffin. multiplicationis, atque 68. ad $8\frac{1}{2}$ similiter octuplus: constat enim 68. ex duobus, scilicet 64. quadrato, & ex dimidio suæ radicis, scilicet 4. estq́; 64. octuplus ad 8. suam radicem, & totuplus etiam quatuor dimidius eiusdem radicis ad $\frac{1}{2}$. Quare totum 68. ad totum $8\frac{1}{2}$ similiter octuplum. Constat ergo propositum. quod sicut de octo, ita de quotcunque propositis radicibus similiter ostendemus.

PROPOSITIO 38.

1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
15	225

Quod fit ex aggregato quotlibet radicum ab vnitate ordinatarum in se ipsum multiplicato, æquale est aggregato omnium Cuborum à singulis radicibus factorum. Nam per diffin. aggregatum radicum ab vnitate ordinatarum, est triangulus numerus postremę radicum. Sed triangulus talis in se ductus, producit aggregatum cuborum omnium radicum vsque ad postremam inclusiue, per 58a præcedentis libri. Igitur & aggregatum ipsum radicum in sese multiplicatum producit eorundem cuborum aggregatum. quod erat demonstrandũ.

COROLLARIVM.

Vnde manifesta fit regula progressionis cuborum. Et hìc, sicut in quadratis, notandum, quòd si pro radicibus proponantur aliæ quantitates secundum primę crementum in ordinem continuatæ: tunc proportio earum singularum, ad singulas radices triplicanda est: & secundùm talem proportionem adaugenda erit, vel minoranda summa cuborum à radicibus factorum, vt proueniat summa cuborum propositarum quantitatum.

COROLLARIVM.

Item huc spectat quidquid de pyramidibus in præcedenti libro conclusum est. Nam pyramis triangula est congeries triangulorum: quadrata, quadratorum: pentagona, pentagonorum; hexagona hexagonorum, & deinceps ab vnitate ordinatorum. Vnde totidẽ progressionũ regulæ propagãtur.

PROPO.

PROPOSITIO 39ª.

Duas propositas rationes coniungere. Sunto duę rationes, vna per duos numeros a b. & altera per duos numeros c d. significata, oportet eas coniungere: hoc est, rationem ex ipsis duabus composita inuenire. Hoc fiet per multiplicationem terminorum vnius in terminos alterius sic: Ducatur a. in c.& fiat e. Ducatur b.in d. fiat g. Dico igitur, quòd ratio e.ad g. est aggregatum rationum a.ad b. & c. ad d. hoc est, quòd ratio e. ad g.componitur ex rationem a. ad b. & ex ratione c.ad d.Quod sic ostenditur.Ex a.in d. fiat f. & tunc, quoniam a. multiplicans ipsas c d.facit ipsas e f.erit per primam sexti, sicut c.ad d.sic e. ad f. Item, quia d. multiplicans ipsas a b.producit ipsas f g.erit sicut a. ad b.sic f. ad g.Sed ratio e.ad g. componitur ex rationibus e. ad f. & ipsius f. ad g. igitur eadem ratio e. ad g.componetur ex nominibus æqualibus, scilicet a. ad b. & c.ad d. Quod erat demonstrandum.

a. 3 —— c. 5 —— e. 15
b. 2 —— d. 4 —— g. 8
f —— 12

e. c.
f. d. a
g. b

CORROLLARIVM.

Non aliter tres, aut plures rationes in vnam colligentur.

PROPOSITIO 40ª.

Duarũ rationum propositarum alterã ab altera subtrahere. Sunto duæ rationes a. ad b. & c. ad d. oportet subtrahere hanc ab illa. Hoc fiet per multiplicationem terminorum ordine permutato, sic:Ducatur d.in a.& fiat e. Ducatur c. in b.& fiat f. Dico ergo, ratio e. ad f. est, quæ restat post subtractionem rationis c.ad d. à ratione ipsius a.ad b.Quod sic ostenditur. Ex c. in a. fiat g. & tunc, quia c. multiplicans ipsos a b. facit g f. erit, sicut a. ad b. sic g. ad f. & quoniam a. multiplicans ipsos c d. faciunt ipsos g e. erit sicut c. ad d.sic iam g.ad e. Sed ratio g. ad f. componitur ex ratione g. ad e. & ex ratione e. ad f. ergo ratio a. ad b. componitur ex iisdem: fuit autem sicut c.ad d. sic g.ad e. Igitur ratio a.ad b. componetur ex rationibus c. ad d. & e. ad f. Quare, ablata ratione c. ad d. à ratione a. ad b. supererit ratio e.ad f. quod erat demonstrandum.

g. 45

c 3 / d 2 × a 5 / b 3 — e 30 / f 24

g. a. c
e. ... d
f. b.

PROPOSITIO 41ª.

Datam rationẽ toties, quoties quis proponat, multiplicare. Si data ratio duplicanda sit: per antepręmissam, iungatur bis

3—3—9—27—81
2—2—4—8—16

1
3 . 2
9 . 6 . 4
27 . 18 . 12 . 8
81 54 . 36 . 24 . 16.

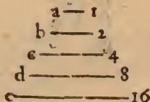
bis ipſamet ſibi, ſi triplicāda, duplatæ iam iungatur iterum: ſi quadruplicanda, triplatę iungatur iterum: itaque deinceps. Ita enim intelligitur multiplicari ratio, vt bis, ter, quaterve continuetur in terminis. Vnde quadratorum ratio dupla: cuborum tripla; ſecundorum quadratorum quadrupla ad laterum ſiue radicum rationem.

COROLLARIVM.

Igit rationis duplatæ terminis vn⁹ intererit medi⁹ proportionalis: Triplatæ, duo; Quadruplatæ, tres: itaque deinceps.

PROPOSITIO 41ª.

Datam rationem bifariā, ſiue trifariam, ſiue quadrifariā, ſiue plurifariam, vtcunque quiſpiam poſtulauerit, æqualiter partiri.



Sint datæ rationis termini a c. ſi oporteat rationem a. ad c. bifariam partiri, interponatur eis media proportionalis b. Si autem datæ rationis termini ſint a d. & oporteat ipſam trifariam diuidere, tūc interponātur eis duæ mediæ proportionales b c. Si verò datę rationis termini ſint a e. & oporteat ipſam quadrifariam partiri: tunc interponantur eis tres mediæ proportionales quantitates b c d. Cuius problematis practica executio, quamuis à nobis in Arithmeticis quæſtionibus ſit abunde tradita, hìc tamen ab exemplis non abſtinebimus. Et in primis notandum, quòd quando propoſitæ quantitates ſunt adinuicem ſicut quadrati numeri: tūc vna quantitas interiacet illis media proportionalis: quando autem, ſicut cubi numeri, tunc duæ mediæ. Quando verò ſicut quadrati quadratorum, tunc tres mediæ. Quando demum, ſicut quadrati cuborum, tūc quinque mediæ proportionales quantitates propoſitis interiacent: & in omni tali caſu tales quantitates continue proportionales ſunt adinuicē cōmēſurabiles; quippe quæ inter ſe in ratione numerorū: vnde & rationes ipſæ tunc ſunt rationales, hoc eſt, per numeros expreſſæ, atq; ideo propoſita ratio tunc ſecatur in rationes cognitas per numeros. Si verò propoſitæ quantitates ſecus, quàm dictum eſt, ad inuicem ſe habeant: interpoſitæ proportionales mediæ rationales non erunt. Exempli gratia, proponantur mihi duo numeri 8. & 18. quibus iubeor medium proportionalem inuenire, quoniam tales numeri ſe habent adinuicem, ſicut 4. & 9. quadrati numeri, quibus interiacet medius proportionalis b. Ideo & propoſitis vnus ſimiliter medius intererit proportionalis 12. duplum ad illum medium, ſicut propoſiti ad quadratos dupli ſunt.

Exempla rationalium.

8. 4	16. 8
12. 6	24. 12
18. 9	36. 18
	54. 27

3. 1	3. 1
6. 2	6. 2
12. 4	12. 4
24. 8	24. 8
48. 16	48. 16
	96. 32
	192. 64

Item

Item si iubeat ipsis 16. & 54. duos proportionales interponere: quoniam tales numeri sunt ad inuicē, sicut 8. & 27. cubi numeri, quibus interiacent duo medij proportionales, scilicet 12. & 18. iam ideo & propositis totidē medij proportionales interiacebūt scilicet 24. & 36. Item, si ipsis 3. & 48. tres medios proportionales accōmodare velim, nō minus licebit: cum sint sicut 1. & 16. quadrati secundi quibus tres 2.4.8 medij intersunt: erūtq; inter ꝓpositos medij 6.12.24. Adhuc, si his numeris 3. & 192. lubet intercludere quinque medios proportionales possibile erit: quādoquidē tales sunt in proportione ipsorum 1. & 64. qui sunt quadrati cuborū, quibus nemo nescit quinq; numeros interesse proportionales scilicet 2.4.8.16.32. Vnde & propositis intererunt totidē scilicet 6.12.24.48.96. Quod si propositi numeri aliter, q̄ dictū est, adinuicem se habeant, non intererunt ipsis, quos diximus, numeri proportionales: sed quātitates irrationales. Exempli causa, proponantur duo numeri nullā dictarū proportionum ad inuicem seruantes, vtpote 2. & 3. Iā his nullatenus medij proportionales, quos diximus, intererunt; sed quædā irrationales quantitates. Itaque si velim ipsis 2. & 3. mediā includere proportionalē, agā per eorū quadratos 4. & 9. quib⁹ interest 6. qui quadratus erit mediæ quæsitæ, quæ iam potentia tantū notescit. Nam sicut tres quadrati 4.6.9. sunt continuè proportionales, ita & eorum radices scilicet r.4. r.6. r.9. sunt continuè proportionales. Si autem ijsdem numeris velim duas medias proportionales inserere, assumam eorum cubos 8. & 27. quorum medij duo sunt 12. & 18. qui cubi sunt duarum quas quærimus mediārum: Nam radices cuborum proportionalium sunt & proportionales. Si vero ijsdem tres medias interponere iubear, exponam eorum secundos quadratos, scilicet 16. & 81. quorum tres numeri medij sunt; scilicet 24. 36. 54. qui secundi quoque quadrati erunt quantitatum trium mediārum, quas quærimus: Et quoniam horum numerorum medius quadratus numerus est, iam media trium quantitatum non solum secundo quadrato sed etiam primo notescit: eritque ipsa r. 6. Si demum, ipsis 2. & 3. quinq; medi.s proportionales procurem, eliciam ex ipsis quadratos cuborum, siue cubos quadratorū, qui sunt 64. & 729. Quibus interponi pn̄t quinq; numeri ꝓportionaliter. s. 96. 144. 216. 324. 486. q̄ similiter erūt quadrati cuborū quinq; mediarū, quas

Exempla Irrationalium.

r. 4.	2
r. 6.	r. 6
r. 9.	3
r. cu. 8	. . 2
r. cu. 12.	r. cu. 12
r. cu. 18	r. cu. 18
r. cu. 27	. . 3
r r. 16.	2
r r. 24.	r r. 24
r r. 36.	r. 6
r r. 54.	r r. 54
r r. 81.	. . 3
r.□.r.cu.64	 2
r.□ r.cu.96	r.□.r.cu.96
r.□.r.cu.144	r.cu.12.
r.□.r.cu.216	r.□.16.
r.□.r.cu.324	r.cu.18.
r.□.r.cu.486	r.□.r.cu.
r.□.r.cu.729	. . . 3 . .

quas quærimus, quantitatum. Et quoniam horum medius habet cubam radicem, scilicet b. iam media quantitas erit radix quadrata b. Item, quoniam huius medij collaterales sunt quadrati numeri, quorum radices quadratæ sunt 12. & 18. idcirco & mediæ quantitatis collaterales, erunt radices cubæ numerorum 12. & 18. Sed hæc omnia non solùm ex elementis Euclidis demõstrãtur, verumetiam in triuialibus ludis practico cuilibet sunt notissima. Quatenus tamen problematis qualitas & locus exigebat, hæc à nobis inducta sunt.

COROLLARIA.

Ex quibus quidem manifestum, quòd in quantitatibus continue proportionalibus, si prima & secunda fuerint rationales, tunc sequentes in eadem proportione continuatæ semper in infinitum rationales erunt. Si autem prima & tertia tantùm rationales fuerint: tunc quinta, septima & singulis semper intermissis, sequentes rationales erunt: intermissæ verò omnes potentia tãtùm expressę. Si verò prima & quarta rationales duntaxat esse contigerit: tunc septima, et decima, et tredecima, et binis semper intermissis cæteræ sequentes rationales erunt, intermissæ autem cubo tantùm cognitæ. Adhuc, si primæ et quinta solùm rationales supponantur: tunc nona, tredecima, septemdecima, et ternis semper intermissis, singulæ rationales erunt. trium verò vbicunque intermissarum media quadrato tãtùm cognita, duæ ceterę mediales, hoc est, per secundum quadratum pronunciatæ. Denique si prima et septima tantùm supponantur rationales: tunc necesse erit tredecimam, vndeuicesimam, vigesimamquintam, et quinis semper intermissis singulas sequentes esse rationales. Quinque verò in quouis loco intermissarum mediam potentia tantùm esse rationalem: duas autem huic collaterales cubo tantùm pronunciabiles: duasque extremas rationalibus proximas quadrato cubi tantùm cognitas. Quæ corollaria ex ipsa proportione, ductuque quantitatum satis constat. Consyderata numerorum multitudine, quæ siue quadratis, siue cubis, siue secundis quadratis, siue quadratis cubicis proportionaliter intercidit. & ipsorum quadratorum, seu cuborum productis.

LIBRI SECVNDI PARS SECVNDA.

PROLOGOMENA.



CIRCA irrationalium quantitatum species succurrunt quædam speculationes tam ad magnitudinum Symmetriam, quàm ad praxis, & rationum pleniorē notitiam spectantes, olim à nobis explicatæ: quas, quoniam huic secundo libello congruæ videbantur, hìc subiunximus. Quare, vt apertius intelligātur, exordium capiemus à diffinitionibus ipsarum irrationalium magnitudinum. Deinde nō per lineas, & areas, quemadmodum Euclides, sed sub terminis cōmensurabilium & incommensurabilium quantitatum, earum condictiones, proprietates & colligantias proponemus, ac per nostra supposita demonstrabimus. Nec facile quispiam fuisse putet, elementa huiusmodi à lineis & areis ad quantitatem in genere sumptam transferre, & numerariam simul praxim hinc deriuatam ostendere: quippe quæ sicut passim in triuialibus scholis trita, ita nécubi satis fuerat demōstrata. Ordior itaque nouum demonstrandi genus, tantoq; in hac parte præstantius Euclideo, quanto generalis quantitas dignior ac purior & primariæ mathematicæ, quàm linea specialis, est conuenientior. Simul per viam hanc, quam in demonstrando assumimus, multa notescent, quæ in decimo Elementorum desyderantur.

DIFFINITIONES.

Commensurabiles magnitudines dicuntur quas commu nis mensura metitur.

Incommensurabiles verò, quarum impossibile est inueniri communem mensuram.

Commensurabiles potentia quantitates sunt,quarum potentiæ,hoc est quadrata,sunt commensurabilia.

In commensurabiles vero potentia, quarum quadrata incommensurabilia.

Commensurabiles in secunda potentia quantitates sunt, quarum secunda quadrata sunt commensurabilia.

Incommensurabiles similiter,quarum incõmensurabilia.

Commensurabiles cubo quantitates sunt, quarum cubi commensurabiles.

Incommensurabiles verò cubo, quarum cubi incommensurabiles.

Quibus ita se habentibus, si proponatur quantitas quãpiam; erunt infinitæ quantitates illi commensurabiles, & quantitate,& potentia,& potentia secunda,& cubo.

Vocetur itaque proposita quantitas Rationalis, vnde & quadratum ipsius,& secundum quadratũ,& cubus,& quæcunque dignitates ab ea propagatę rationales erunt.

Et quantitas propositæ, siue magnitudine, siue potentia commensurabiles,rationalis vocetur.

Incommensurabilis verò,irrationalis.

Quibus ita diffinitis subiungemus singulas irrationalium diffinitiones: nam, cum

Quantitas rationalis sit, quę positę rationali commensurabilis est.

Rationalis potentia tantùm erit, cuius quadratum duntaxat rationale est. Similiter & rationalis cubo tantùm, cuius cubus tantùm rationalis est.

Medialis autem, cuius secundum quadratum duntaxat rationale est. Ex quibus diffinitionibus sequitur, vt quantitas rationalis sit etiam & potentia, & cubo, & potentia secunda rationalis: non autem è contrario. Item vt quantitas potentia rationalis sit etiam potentia secunda rationalis, non autem è contrario. Nunc diffiniemus quantitates irrationales bimembres.

Binomium constat ex duabus quantitatibus rationalibus ac potentia tantùm commensurabilibus. Quarum excessus

Apotome, vel Residum dicitur. Et necesse est, vt earum quadrata conficiant rationale: earum verò productum mediale.

Bimediale primum constat ex duabus quantitatibus medialibus potentia tantùm commensurabilibus, & rationale comprehendentibus: quarum quadrata conficiunt mediale. Harum excessus. Residuum mediale primum dicitur.

Bimediale secundum constat ex duabus quantitatibus medialibus potentia tantùm commensurabilibus & mediale comprehendentibus: quarum quadrata conficiunt mediale, quod est mediali prædicto incommensurabile. Harum excessus Residuum mediale secundum dicitur.

Maior constat ex duabus quantitatibus potentia incommensurabilibus: quarum quadrata conflant rationale: & quod sub ipsis mediale. Harũ verò excessus dicitur Minor.

Potens rationale ac mediale constat ex duabus quantitatibus potentia incommensurabilibus, quarum quadrata cõflant mediale, & quod sub ipsis rationale. Harum excessus dicitur cum rationali mediale totum potens.

Potens duo medialia constat ex duabus quantitatibus potentia incommensurabilibus, quarum quadrata conflant mediale, & quod sub ipsis mediale prædicto incommensurabile. Harum excessus dicitur cum mediali mediale totum potens. In quibus sex dffinitionibus mediale intelligitur quantitas potentia tantùm rationalis. Namque omnis area, siue omne productum potentia tantùm rationale, solet ab Euclide mediale vocari. Et linea potens talem aream, solet ab eodem linea medialis dici. Quod tamen non interturbabit propositum nostrum. Nos enim quantitatem in genere siue illa linea sit, siue area, potentia tantùm rationalem vocamus, cuius quadratum rationale. Medialem verò, cuius quadratum secundum tantùm rationale est. Sed in diffinitionibus dictarum sex irrationalium sequemur Euclidem.

Præterea tam binomium, quàm residuum habet sex species sic distinctas. Quando maior portio Binomij, seu residui, est potentior breuiore in quadrato quantitatis sibi commensurabilis: ipsum est primæ, secundæ, vel tertiæ speciei. Quando verò maior portio breuiorem potentialiter excedit in quadrato quantitatis sibi incommensurabilis, ipsum est quartæ, quintæ, vel sextæ speciei. Deinde si maior por-

E e tionum

tionum fuerit rationalis quantitate binomium seu Residuum erit primæ, vel quartæ speciei. Si minor portio fuerit rationalis: erit secundæ, vel quintæ. Si neutra portionum fuerit rationalis, erit tertiæ, vel sextæ speciei.

SCHOLIA QVÆDAM.

Notandum, quòd quantitatum alia est rationalis, Alia irrationalis. Et irrationalium, alia simplex, hoc est, vnius nominis, alia bimembris. Rursum, simplicium alia potentialiter tantùm rationalis: alia cubo tantùm, alia quadrato secundo tantum rationalis: quæ Medialis vocatur. Bimembrium autem duæ sunt precipuæ species. Prima species, cuius membra sunt potentialiter tantùm commensurabilia. Secunda, cuius portiones sunt etiam potentialiter incommensurabiles. Prima species est triplex; & totuplex secunda. Illa enim continet Binomium per compositionem partium, & Residuum per excessum. Item Bimediale primum, cum suo residuo mediali primo. Item Bimediale secundum, cum suo residuo mediali secundo. Hæc verò species continet Maiorem, cum Minori, item Potentem rationale, & Mediale, suumque Residuum, scilicet cum rationali mediale potentem: Item Potentem duo medialia: suumque Residuum cum mediali mediale potentem. Præterea tam Binomium, quàm Residuum est sex specierum. Quæ singula iamdudum diffinita sunt. Sed attendendum, quòd quantitas duorum nominum siue bimembris est, quæ constat ex duabus portionibus ita ad inuicem affectis, vt ad Vnum nomen redigi nequeant. Secus enim non erit Binominis quantitas. Vt autem portiones tales alicuius quantitatis bimembris sint ita affectæ, vt ad vnum nomen redigi nequeant, opus erit duabus conditionibus, scilicet vt portiones sint inuicem incommensurabiles (nam portiones commensurabiles coniunctæ conficiunt quantitatẽ vnius nominis & eius speciei, cuius sunt partes, vt ostendemus) & insuper vt congeries quadratorum ipsarum portionum sit incommensurabilis producto earundem: sic enim fiet, vt talis congeries cum duplo talis producti (quod est quadratum propositæ bimembris per quartam secundi) minime faciat quantitatem vnius nominis. Nam si dicta congeries dicto producto commensurabilis esset; tunc congeries cum duplo dicto, hoc est, dictum quadratum, esset quantitas vnius nominis, & perinde quantitas ipsa esset vnius nominis: quia videlicet, radix vni nominis quadrati: quę conditiones exprimuntur in prędictis irrationalium diffinitionibus. Quoniam igitur necesse est, portiones, ex quibus bimembris quantitas, siue per compositionem, siue per abscissionem procedit, esse inuicem incommensurabiles: & insuper congeriem quadratorum earundem portionum esse incommensurabilem producto ipsarum: idcirco sex vtrinque irrationalium quantitatum species propagari oportet. Si enim portiones fuerint incommensurabiles in magnitudine tantùm, hoc est, potentia solùm commensurabiles, fient tres species irrationalium, scilicet prima, secunda, & tertia. Si autem portiones fuerint incommensurabiles etiam potentialiter, fient tres reliquę species, scilicet quarta, quinta, & sexta. Deinde, si congeries quadratorum ipsarum portionum fuerit rationalis, & productum earum mediale, fiet prima, vel quarta species. Si autem congeries medialis, & productum rationale, fiet secunda, vel quinta. Si verò tam congeries, quàm productum mediale, & alterutrum incommensurabile; fiet tertia, vel sexta species, tam scilicet per coniunctionem portionum, quàm per excessum maioris supra minorem.

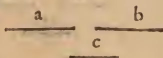
SPECIES

SPECIES QVANTITATVM.

- Quantitas
  - Rationalis.
  - Irrationalis.
    - Simplex, scilicet rõnalis
      - Potentia tantum
      - Cubo tñ
      - Quadrato 2. tñ scilicet medialis
    - Bimembris ex portionibus.
      - Potentia tantum cõmensurabilibus
        - Binomium vel residuum, quando portionum quadratorum aggregatum rationale, productũ mediale.
          - primum
          - 2um
          - 3um
          - 4um
          - 5um
          - 6um
        - Bimediale primum, vel Residuum mediale primum, quando portionum quadratorum aggregatum mediale productum rationale.
        - Bimediale secundum, vel Residuum mediale secundũ quando portionum quadratorum aggregatum med & productum mediale inuicem incommensurabilia.
      - Potentialiter etiã incõmẽsurabilib⁹
        - Maior, vel minor. quando partium quadratorum aggregatum rationale & productum mediale.
        - Potens rationale ac mediale, vel cum rationali mediale potens, quando partium quadratorum aggregatum mediale & productũ rationale.
        - Potens duo medialia, vel cum mediali mediale potens. qñ partium quadratorũ aggregatũ mediale, & productũ mediale inuicem incommensurabilia.

PROPOSITIO. 43ª.

Omnes duæ quantitates inuicem commensurabiles, sunt sicut numerus ad numerum. Et duæ quantitates, quæ sunt sicut numerus ad numerum, sunt inuicem commensurabiles. Sunto a.& b.quãtitates inuicẽ cõmensurabiles: Aio, ꝙ sunt sicut numer⁹ ad numerũ. Cũ enim cõmensurabiles sint inuicẽ a b. erit p diffi. cõmensurabiliũ quãtitatũ, cõis earũ mensura, quæ sit c. Itaq; a. diuidetur in aliquot partes singulas æquales ipsi c. Itemq; b. diuidetur in aliquot partes singulas æquales ipsi c. Quare a.& b. erunt ad inuicẽ sicut numeri partiũ. Et hæc est prima pars propositi. Contrà, sit a. quantitas ad b. quãtitatẽ sicut numerus ad numerũ. aio, ꝙ a b. cõmensurabiles inuicẽ sunt. Secetur eñ a b. singulæ in tot partes æquas, quot vnitates hãt singuli numeri. sitq; c. vna partiũ quantitatis a. eritq, c. ad a. sicut vnitas ad numerũ partiũ a. Sed per hypotesim a. ad b. sicut numer⁹ partiũ a. ad numerũ partiũ b. Erit igitur ex æquali c. ad b. sicut vnitas ad numerum partium b. Quare quoties vnitas mensurat numerum



partium b.toties & c. quantitates mensurat ipsam b. Sed c. metitur ipsam a.igitur per diffin.commensurabilium quantitatum, ipsæ a b. quantitates inuicem commensurabiles. Quod fuit residuum propositi.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd duæ quantitates inuicem incommensurabiles non sunt adinuicem sicut numerus aliquis ad numerum aliquem. Itemque, quòd duæ magnitudines, quæ non sunt ad inuicem sicut numerus quispiam ad numerum quempiam, sunt inuicem incõmensurabiles. Sequuntur hæc ex præmissa a destructione contrariorum.

PROPOSITIO 44ª.

Omnes duæ magnitudines vni commensurabiles, sunt inuicem commensurabiles. Duæ quantitates sint a b. quæ singulæ sint ipsi c.commensurabiles. Aio, quòd & ipsę a b. sunt ad inuicem commensurabiles. Nam cum a c. sint commensurabiles erunt, per præcedentem, sicut numerus ad numerum: & similiter, quoniam c b. commensurabiles erunt, & sicut numerus ad numerum. Sumantur igitur per quartam octaui Eucl. tres numeri d e f. continuantes duas rationes scilicet, vt sicut est a. ad c.sic sit numerus d.ad numerum e. & sicut c. ad b. sic sit numerus e. ad numerum f. & tunc ex ęquali erit, sicut numerus d. ad numerum f. sic quantitas a. ad quantitatem b. Igitur per secundam partem præcedentis, quantitas a b. sunt ad inuicem commensurabiles. quod est propositum.

PROPOSITIO 45ª.

Omnes duæ quantitates, quarum vna commensurabilis est alicui tertiæ, reliqua verò eidem incommẽsurabilis, sunt adinuicem incommensurabiles. Exempli gratia, magnitudinum a b. vna scilicet a. sit commensurabilis ipsi c. reliqua verò b. incõmensurabilis eidem c. Aio tunc, quòd ipsæ a b. inuicem incommensurabiles sunt. Secus enim erunt a b. commensurabiles: sed ipsæ a c. per hyp. cõmensurabiles. igitur per pręmissam erunt b c. inuicem commensurabiles: quod est supposito contrarium. Nõ igitur sunt a b. inuicem commensurabiles. ergo incommensurabiles. quod est propositum.

PROPOSITIO 46ª.

Omnium duarum quantitatum inuicem incommensurabilium congeries & excessus sunt inter se & ipsis inuicem incommensurabiles. Et si congeries vni earum sit incommensurabilis, erit & reliquæ

reliquæ commensurabilis. & ipsæ inter se commensurabiles. Hæ conclusiones facilè constant ex hac communi sententia: quoniam quantitas, quæ metitur partes, metitur & totũ. Et, quæ metitur totum & ablatum, metitur & relictũ.

PROPOSITIO 47ª.

Omnium duarum quantitatum inuicem incommensurabilium congeries & excessus, sunt inter se & ipsis inuicem incommensurabiles. Et si congeries vni earum sit incommensurabilis, erit & reliquæ incommensurabilis. Et ipsæ inter se incommensurabiles. Nam si secus esset, tunc, per præcedentem, sequeretur contrariũ suppositi. Omnino igitur vera sunt quę proponuntur.

PROPOSITIO 48ª.

Omnes duæ quantitates proportionales duabus quantitatibus quoquo modo commensurabilibus, sunt eodem modo commensurabiles. Et proportionales duabus aliquo modo incommensurabilibus, sunt eodem modo incommensurabiles. Exempli gratia, sint quantitates a b. ipsis c d. quantitatibus inter se commensurabilibus proportionales: hoc est sit a. ad b. sicut c. ad d. Aio, quòd a b. erunt inuicem commensurabiles. Nam si c d. sunt commensurabiles, erunt per 43ª huius, sicut numerus ad numerum. Igitur erit a. ad b. sicut numerus ad numerum: quare per secundam partem dictæ 43ᵉ a b. sunt inter se commensurabiles. Quòd si c d. sint commensurabiles, aio, quòd & a b. inter se incommensurabiles erunt. Nam tunc, per corollar. 43ᵉ huius, c d. non erunt sicut numerus ad numerum, & ideo neque a. ad b. erit sicut numerus ad numerum: & perinde per secundam partem dicti corollarij a b. tunc incõmensurabiles inter se erunt sicut proponitur. Item si c d. ponantur aut potentia tantùm, aut cubo tantũ, aut quadrato secundo tantùm commensurabiles: eodem penitus modo & ipsæ a b. commensurabiles erunt. Si autem c d. aliquo dictorum modorum ponantur incommensurabiles: eodem similiter modo & ipsę a b. incommensurabiles erunt: Quoniam scilicet quantitatum proportionalium proportionales sunt tá quadrata, quàm cubi, & quàm secunda quadrata. Et idcirco sequitur eorum commensurabilitas, vel incõmmensurabilitas: quippe quæ comitatur proportionem, adducta 41ª & eius corollario.

a	b
c	d

a	b
c	d

PROPOSITIO 49ª.

Omnis quantitas rationalis multiplicans aliquam quantitatem, producit quantitatem multiplicatæ cognominem & commensurabilem.

a	b	c
3	r.5.	r.45
d	e	f
9	5	45

mensurabilem. Exempli gratia, rationalis quantitas a. multiplicet quantitatem b. potentia tantùm rationalem, & faciat c. Aio, quòd c. potentia tantùm rationalis est, & ipsi b. multiplicatæ commensurabilis. Sit enim ipsius a. quadratum d. & ipsius b. quadratum e. & ex d. in e. fiat f. Eritque per coroll. vndecimę huius, f. quadratum ipsius c. Cumque ex diffinitionibus, quantitatum a b. ipse d. sit numerus quadratus: ipse autem e. numerus non quadratus: iam eorum productum f. per coroll. secundæ noni Eucl. non erit numerus quadratus. Igitur c. quæ radix est ipsius f. per diffin. erit potentia tantùm rationalis. Cumque per diffin. multiplicationis, c. productũ ad b. multiplicatam, sit sicut a. multiplicans ad positam: sitque a. positæ commensurabilis, quia rationalis: iam, per præcedentem, ipsa c. ipsi b. commensurabilis erit: sicut proponitur. Similiter autem, si b. cubo tantum rationalis supponatur, ostendetur & ipsa c. cubo tantum rationalis, & ipsi b commensurabilis: & si b. quadrato secundo tantùm rationalis ponatur, & ipsa c. quadrato secundo tantum rationalis, & ipsi b. commensurabilis demonstrabitur. Sicut proponitur.

PROPOSITIO 50ª.

a b c

Si productum fuerit commensurabile multiplicatæ quantitati, tunc multiplicans est rationalis. Vt si a. multiplicans b. faciat c. ipsi b. commensurabilem: aio, quòd a. rationalis est: Nam per diffin. multiplicationis, erit, sicut c. ad b. sic a. ad positam. Cumque per hypo. c. sit commensurabilis ipsi b. erit per antepræmissam a. commensurabilis positæ, quare per diffin. a. rationalis: quod est propositum.

PROPOSITIO 51ª.

a b c

Omnis quantitas diuisa per quantitatem sibi commensurabilem, exhibet in quotiente quantitatem rationalem. Sint a b. quantitates commensurabiles inter se, & diuidatur b. per ipsam a. & proueniat c. Aio, quòd c. quantitas rationalis est. Nam, per diffin. diuisionis, erit, sicut a. diuidens ad positam, sic b. diuisa ad c. prouenientem. Et permutatim, sicut a. ad b. sic posita ad c. Sed a. per hypot. commensurabilis est ipsi b. ergo per 48ª præmissam, & posita commensurabilis ipsi c. Ergo c. rationalis: quod est propositum. Hoc idem ex præcedenti ostendi potest.

PRO-

PROPOSITIO 52ª.

Omnium duarum quantitatum inuicem commensurabilium quadrata sunt adinuicem sicut quadrati numeri: & cubi, adinuicem, sicut cubi numeri: & secunda quadrata, sicut bis quadrati numeri: Vt si sint a b. quantitates inuicem commensurabiles, quarũ quadrata sint c d. cubi aũt e f. secunda autẽ quadrata g h. Aio, quòd c d. erunt sicut quadrati numeri adinuicem: & e f. sicut cubi numeri: & g h. sicut bis quadrati numeri. Nam, per 43ª huius, a b. quantitates erunt ad inuicem, sicut numerus ad numerum: sed tam in quãtitatibus, quàm in numeris quadrata sunt in dupla: cubi in tripla: secunda quadrata in quadrupla ratione radicũ. Igitur c d. sunt ꝓportionales quadratis talium numerorum. Et e f. proportionales cubis talium numerorum: & g h. proportionales bis quadratis talium numerorum. Et hoc est propositum.

a	b
c	d
e	f
g	h

PROPOSITIO 53ª.

Omnes duæ quantitates, quarum quadrata sunt adinuicem sicut quadrati numeri; vel quarum cubi sunt adinuicem sicut cubi numeri: vel quarum secunda quadrata sunt adinuicem sicut bis quadrati numeri, sunt inter se commensurabiles. Exempli gratia, sint duæ quantitates a b. quarum quadrata c d. & quarũ cubi e f. & quarum secunda quadrata g h. Aio, quòd, si c d. fuerint adinuicem, sicut quadrati numeri: vel si e f. fuerint adinuicem, sicut cubi numeri; vel f. g h. fuerint adinuicem, sicut bis quadrati numeri: Tunc in omni tali casu, ipsæ a b. quantitates erunt adinuicem commensurabiles. Nam si c d. sint inter se, sicut quadrati numeri; cùm talibus numeris intersit vnus medius numerus proportionalis, intererit ipsis c d. vna media quantitas proportionalis, quæ sit k. eruntque c k d. quantitates talibus tribus numeris proportionales: cumque quadrata sint in dupla ratione radicum: erit sicut c. ad k. sicut a. ad b. Sed c. ad k. sicut numerus ad numerum: igitur a. ad b. sicut numerus ad numerum: quare per secundam partem 43ª huius, a. b. inuicem commensurabiles: quod est propositum. Si autem e f. sint inter se sicut cubi numeri: tunc, quia talibus numeris intersunt duo numeri medij proportionales, intererunt ipsis e f. duæ mediæ quantitates proportionales, quæ sint

a . b
c . k . d
e . l . m . f
g . n . o . p . h

2 . 3
4 . 6 . 9
8 . 12 . 18 . 27
16 . 24 . 36 . 54 . 81

l m. eruntque e l m f. quantitates talibus quatuor numeris proportionales.& quoniam cubi ſunt in tripla proportione radicum:erit,ſicut a.ad b.ſic e.ad l.ſed e. ad l. ſicut numerus ad numerum:Igitur ſicut numerus ad numerũ,ſic a.ad b.& ideo per ſecundã partem 43ᵉ ab inuicem commenſurabiles. Si demum g h.ſint inter ſe, ſicut bis quadrati numeri : tunc quoniam ta libus numeris intererunt tres numeri medij pro portionales,intererunt & ipſis g h.tres mediæ proportionales quantitates:quæ ſint n o p.eruntque g n o p h. quantitates talibus quinque numeris proportionales:& quoniam ſecũda quadrata ſunt in quadrupla ratione radicum:erit iam a.ad b.ſicut g. ad n.Sed g.ad n.ſicut numerus ad numerum: igitur ſicut numerus ad numerum , ſic a. ad b. quare per ſecundam partem 43ᵉ ab inuicem commenſurabiles , ſicut fuerat à principio demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex his manifeſtũ eſt,quòd omnium duarum quantitatum inuicem incommẽſurabilium,neq; quadrata ſunt adinuicẽ, ſicut quadrati numeri:neque cubi,ſicut cubi numeri,neque ſecunda quadrata,ſicut bis quadrati numeri.

COROLLARIVM.

Contrà,& omnes duę quantitates,quarum quadrata non ſunt ad inuicem , ſicut quadrati numeri ; vel quarum cubi non ſunt ad inuicem,ſicut cubi numeri: vel quarum ſecunda quadrata non ſunt ad inuicem, ſicut bis quadrati numeri ; ſunt inter ſe commenſurabiles . Nam hæc duo corollaria conſtant ex duobus præcedentibus propoſitionibus , à diſtinctione contrariorum.

COROLLARIVM.

Præterea manifeſtum eſt, quòd quantitates inter ſe cõmenſurabiles, ſunt omnino ,etiam tam quadrato , quàm cubo, quàmque ſecundo quadrato commenſurabiles ; non autem è conuerſo. Nam quantitates,ſiue quadrato, ſiue cubo, ſiue ſecundo quadrato commenſurabiles,non ſunt omnino inter ſe commenſurabiles.

COROLLARIVM.

Vnde ſequitur, vt quantitas rationalis ſit etiam potentia, & cubo,& quadrato ſecundo,& ſic in infinitum rationalis: & non è conuerſo. Nam quantitas ſiue potentia,ſiue cubo, ſiue quadrato ſecundo , rationalis non omnino eſt magnitudine rationalis.

Corol-

COROLLARIVM.

Contrà, quantitates inter se incommensurabiles non omnino sunt & potentia, aut cubo, aut quadrato secundo incommensurabiles. At quantitates potentia, vel cubo, vel quadrato secundo incommensurabiles omnino sunt & magnitudine inter se commensurabiles.

COROLLARIVM.

Vnde sequitur, vt quantitas irrationalis nō omnino sit & potentia, aut cubo, aut quadrato secundo irrationalis. Quantitas verò potentia, vel cubo, vel quadrato secundo irrationalis omnino sit, & magnitudine irrationalis. Quæ corollaria gradatim sequuntur alterum ex altero, vt etiam per exempla numeralium terminorum constat.

PROPOSITIO 54ª.

Omne productum duarum quantitatum potentia tantùm rationalium inuicem commensurabilium, est rationale. Exempli gratia, a b. quantitates potentia tantùm rationales inuicem commensurabiles multiplicatæ inuicem faciant ipsam c. Aio, quòd c. quantitas rationalis est. Sit enim ipsi a. æqualis d. & a. ducta in d. hoc est in se ipsam faciat e. quæ iam rationalis est, cum a. sit potentia rationalis per hyp. Sed per primam sexti, sicut d. ad b. sic e. ad c. commensurabilis est autem per hypo. ipsa d. ipsi b. ergo, per 48ª huius, ipsa e. commensurabilis erit ipsi c. Rationalis est autem e. rationalis ergo per diffin. & c. quod fuit demonstrandum. Aliter & pulchre sic. Sit ipsius a. quadratum ipsa f. & ipsius b. quadratum ipsa quantitas g. eritque per 52ª præcedentem f. ad g. sicut numerus quadrat⁹ ad numerum quadratum. Ducatur ergo f. in g. & proueniat h. eritque h. numerus quadratus: quandoquidem f g. per vigesimam octaui, sunt plani similes. Sed per corollariū vndecimæ huius h. est quadratum ipsius c. ergo c. rationalis, quandoquidem radix est ipsius h. quæ per numerum quadratum repræsentatur. Et radix quadrati numeri rationalis quantitas est, quia cognitus, & scitus numerus, sicut proponitur ostendendum.

a { b——c. / d——e.

f——3
a——r. 3
c 36 h 36
b——r. 12
g——12

a	b
r. 3.	r. 12.

c / b

f	g
3	12

h / 36

PROPOSITIO 55ª.

Omne productum duarum quantitatum rationalium & potētialiter tantùm inter se commensurabilium, est potentia tantùm rationale: quod tamen ab Euclide vocatur mediale. Sunto a b. quantitates rationales, hoc est ambæ potentia tantum rationales

a { b——c / d——e

nales, vel vna rationalis in magnitudine, altera verò tantùm potentia, & inuicé potentialiter tm̃ cõmẽsurabiles, quę inter se multiplicatæ faciant ipsam c. Aio, ꝙ c. est quãtitas potẽtia tm̃ rationalis. Fiant enim ea, quæ in præcedenti, eritque per eadem, sicut d. ad b. sic e. ad c. cumq; per hyp. ipsa d. ipsi b. sit potentialiter tantum cõmensurabilis: erit per 48ª huius, ipsa e. quę rationalis est, potẽtialiter tm̃ cõmẽsurabilis ipsi c. Igitur per diffin. c. potentia tm̃ rationalis est, quod est propositum. In altera verò demonstratione, erit per coroll. 53ª præcedentis, f. ad g. non sicut quadratus numerus ad quadratum numerum & : idcirco f g. per 20ª octaui non erunt adinuicem plani numeri similes. Quare, per primã noni, ipse h. ipsorum f g. productũ non erit quadratus numerus, & per inde c. ipi⁹ h. radix potẽtia tm̃ rationalis est, sicut ꝓponitur.

a — r. 3.   b — r. 5.
c — r. 15.
f — 3   g — 5.
H — 15

SCHOLIVM.

Illud autem notandum, quòd præfatum productum quantitatum rationaliũ ab Euclide vocatur medialis quãtitas, siue Medialis area: quoniam gignitur ex ductu laterum, atq; ita intelligendæ sunt diffinitiones irrationalium magnitudinum, vbi de areis mentio fit. Lineam verò in talem aream potentem, hoc est, cuius quadratum est talis area, medialis dicitur.

PROPOSITIO 56ª

Membra binomij, siue residui, sunt radices duorum numerorũ, quorum maior ad excessum supra minorem se se habet sicut numerus quadratus ad numerum quadratum, fiunt tres primæ species. Si autem secus, fiunt tres reliquæ species Binomij, siue Residui. Item si maior ex numeris dictis sit quadratus, tunc fit prima vel quarta species. Si minor sit quadratus numerus, fiet secunda vel quinta: si neuter sit quadratus numerus, fiet tertia vel sexta species. Exempli gratia, 9. & 5. numeri sunt quadrati membrorum primi Binomij, siue Residui. Numeri 12. & 9. secundi. Numeri 8. & 6. tertij. Numeri 25. & 20. quarti. Numeri 14. & 9. quinti. Numeri 10. & 7. sexti. Vnde talium specierũ radices sic se habent: vt earũ diffinitiones exposcũt.

Binomium pᵘ	——— 3.	p̃	r. 5.
Binomium 2ᵘ	—— r. 12	p̃	3.
Binomium 3ᵘ	—— r 8	p̃	r. 6.
Binomium 4ᵘ	——— 5	p̃	r. 20
Binomium 5ᵘ	—— r. 14	p̃	3
Binomium 6ᵘ	—— r. 10	p̃	r. 7.

Vnde per abscissionem formantur totidem species residuorum.

PRO-

PROPOSITIO 57[a].

Singularum Binomij specierum radices, sunt speciæ singulæ irrationales quantitates per ordinem, scilicet Binomium, Bimediale primum, Bimediale secundum, Maior, Potens rationale ac mediale. & potens duo medialia. Paucis propositum demonstrabo. Esto Binomium, cuius membra a b. b c. Sit ipsius a b. quadratum d e. & ipsius b c. quadratum e f. quorum differentia f d. cuius differentiæ quarta pars sit g. & ipsius g. radix sit h. Mox secta per æqualia quantitate a b. apud k. punctum, ponatur ipsi h. æqualis k l. Post hæc, totius a k l. radix sit m. Relicti autem l b. radix sit n. Aio iam, quòd totum m n. radix est binomij a b c. Deinde ostendam, quòd si a b c. sit binomium primum, tunc m n. erit binomium. Si a b c. binomium secundum, tunc m n. erit Bimediale primum. Si a b c. binomium tertium, tunc m n. erit bimediale secundum. Si a b c. binomium quartum, tunc m n. erit maior. Si a b c. binomium quintum; tunc m n. Potens rationale ac mediale. Si demum a b c. binomium sextum, tunc m n. Potens duo medialia. Nam cùm a b. secetur æqualiter apud k. & inæqualiter apud l. iam per quintam secundi Elementorum Rectangulum a l. l b. cum quadrato k l. hoc est cum g. æqualia sunt quadrato a k. hoc est, quadranti ipsius d e. Sed quadratum ipsius k l. hoc est g. fuit quadrans ipsius d f. igitur reliquum quadrans reliqui, hoc est, rectangulum a l. l b. erit quadrans ipsius e f. Quare per coroll. vndecimæ huius, rectangulum m n. erit radix quartæ partis ipsius e f. hoc est dimidium ipsius b c. ergo duplum ipsius rectanguli m n. æquiualet totum b c. Cumque per hyp. a l. sit quadratum ipsius m. & l b. quadratum ipsius n. erunt quadratum m. quadratum n. cum duplo rectanguli m n. simul æqualia toti a c. Sed per quartam secundi; eadem simul componunt quadratum totius m n. Igitur totum m n. radix est totius a c quod erat primum ex demonstrandis. Reliquum patet ex conditionibus ipsarum specierum binomij: fit enim, vt existente a b c. binomio primo, tunc a l. l b sint rationales. Existente autem a c. binomio secundo, vel tertio, fit, vt a l. l b. sint potentia tantùm rationales. Quare existente a c. binomio primo, erunt

d f e

a k l b c g

m n h

m n.

m n. potentia rationales. Exeunte autem a c. binomio ſecundo, vel tertio, erunt m n. mediales : quandoquidem a l. l b. quadrata ipſarum m n. potentia tantùm rationalia. Et hoc, quoniam, per diffin. binomij primi, ſecundi, & tertij, radix ipſius d f. & ideo radix ipſius g. hoc eſt h. hoc eſt k l. commenſurabilis eſt ipſi a b. & ideo ipſi a k, vel k b. ipſiſque a l. l b. cumque, per primam ſexti, m. ad n. ſit ſicut quadratum m. ad rectangulum m n. hoc eſt ſicut a l. ad dimidium b c. Ideo tunc per quadrageſimam octauam huius, conſtat ipſas m n. eſſe potentia tantùm commenſurabiles. Exiſtente autem a c. binomio quarto, quinto vel ſexto, fit vt a l. l b. ſint inuicem incommenſurabiles : quoniam ſcilicet, per diffin. talium binomiorum, radix ipſius d f. & perinde radix ipſius g. hoc eſt ipſa h. & ipſa k l. incommenſurabilis eſt ipſi a b. & idcirco ipſi a k & ipſis a l. l b. quare, per quadrageſimam ſeptimam huius, ipſe a l. l b. inuicem incommenſurabiles. Vnde conſtat ipſas m n. tunc eſſe potentia incommenſurabiles. Item cum rectangulum m n. ſit dimidium ipſius b c. atque exeunte a c. binomio primo, tertio, quarto, vel ſexto ipſa b c. ſit potentia tantũ rationalis : ideo tunc rectangulum m n. erit mediale. Exeunte verò a c. binomio ſecundo, vel quinto b c. erit magnitudine rationalis : quare tunc rectangulum m n. erit rationale. Præterea cùm quadrata m n. conficiant totam a b. atque exeunte a c. binomio primo vel quarto a b. ſit magnitudine rationalis : Exeunte verò a c. binomio ſecundo, tertio, quinto, vel ſexto, a b. ſit potentia tantùm rationalis. Idcirco exeunte a c. binomio primo vel quarto, quadrata m n. conficiunt rationale. Exeunte verò a c. binomio ſecundo, tertio, quinto, vel ſexto, quadrata m n. conficiunt mediale. Ex quibus quidem, conſyderatis irrationalium quantitatum diffinitionibus, cõſtabit quòd exeunte a c.

d f c
a k l b c g
m n h

Binomio	p°		binomium.
	2°		bimediale primum.
	3°	m n. erit	bimediale ſecundum.
	4°		Maior.
	5°		Potens rõale ac mediale.
	6°		Potens duo medialia.

COROL-

COROLLARIVM.

Hinc ergo comperiri poterunt ſingulæ quantitates irrationales: vt ſi velim, exempli gratia, comperire irrationalem quantitatem, quæ Maior vocatur, per præcedentem, inueniam quartum binomium: & per præſentem, ipſius binomij radicem, quæ, vt oſtenſum eſt, Maior erit. Et ſimiliter per reliquas binomiorum ſpecies reliquas irrationales inueniemus.

Propositio 58[a].

Sex irrationalium quantitatum, ſcilicet Binomij, Bimedialis primi, Bimedialis ſecundi, Maioris, Potentis rationale ac mediale, Potentisq́ duo medialia, ſingularum per ordinem, ſingula quadrata ſunt ſingulæ ſpecies Binomij. Hæc eſt conuerſa præcedentis. Perſiſtam tamen in eadem deſcriptione, ac ſuppoſitis. Ponaturque m n. binomium, vel aliqua ex irrationalibus prædictis. ita vt m n. ſint membra ipſius irrationalis iuxta eius diffinitionem conſiderata: vt habeam ipſius m n. quadratum, ponam ipſius m. quadratum a l. & ipſius n. minoris membri quadratum l b. Item eius, quod fit ex m. in n. duplum ipſam b c. Eritque per quartam ſecundi Elementorum, tota a c. quadratum totius m n. Demonſtrandum eſt igitur, quòd ſi ponatur m n. aliqua ex dictis ſex quantitatibus irrationalibus: erit & a c. aliqua ex ſpeciebus binomij: & quota m n. in ordine ſex irrationalium, tota & a c. in ordine ſpecierum binomij. Namque ex conditionibus membrorum m n. componentium ipſam irrationalem, ſequitur conditio membrorũ a b. b c. conſtituentium ſpeciem binomij. Sic exiſtente m n. Binomio, vel Bimediali primo, vel Bimediali ſecundo, iam per diffin. a l. l b. quæ ſunt ipſorum m n. quadrata, ſunt inuicem cõmenſurabiles. Vnde per 46[a] huius, ſequitur vt k l. ſit ipſis a l. l b. & toti. a b. commenſurabilis. Cumque h. ſit radicis ipſius d f dimidium, erit talis radix commenſurabilis ipſi a b. Igitur a b. potentior quàm b c. in ipſa d f. quadrato ſcilicet radicis ſibi commenſurabilis. Exiſtente autem m n. Maiori, Potenti rationale ac mediale, potentive duo medialia; tunc per earum diffin. a l. l b. ſunt inuicem incommenſurabiles: vnde per 47[a] huius ſequitur, vt k l. ſit ipſis a l. l b. & toti a b. incommenſurabilis: vtque K l. hoc eſt h. ipſius radicis d f. dimidium, & perinde ipſa radix ſit ipſi a b. incommenſurabilis. Quo fit, vt a b. potentior ſit, quàm b c. in ipſa d f. cuius radix eſt ipſi

a b. in-

a f e
a klb c g
m n h

ab. incõmensurabilis. Item, q̃m existente m n. binomio, vel Maiori, a b. est rationalis: b c. verò potentia tantùm est rationalis. Existente autem m n. Bimediali primo, vel potente rationale, & Mediale, a b. est potentia tantum rationalis, b c. verò rationalis. Existente tandem m n. Bimediali secundo, vel potente bina medialia, tam a b. quàm b c. est potẽtia tm̃ rationalis. Preterea, quoniam existẽte m n. binomio, Bimediali primo, Maiori, vel potente rationale & mediale ipsarũ a b. b c. altera est magnitudine, altera potentialiter tantùm rationalis. atque ideo a b. b c. sunt potentialiter tantùm cõmensurabiles. Existente autem m n. Bimediali 2° cum per primam sexti, m. ad n. sit sicut quadratũ m. ad rectangulum m n. hoc est, sicut a l. ad dimidiũ ipsius b c. atque m n. sint incommensurabiles. & ideo a l. & dimidium ipsius b c. sint incommensurabiles per 48ª huius: Cumq; (quoniam a l. l b. inter se commensurabiles, ideoq; tota a b. ipsi a l. commensurabilis est, iam tota a b. dimidio ipsius b c. Et ideo toti b c. per 45ª huius, sit incommensurabilis: sintq; a b. b c. potentialiter commensurabiles: q̃a potẽtia rationalis ex diffi. dicti Bimedialis secundi. Existente tandem m n. potente duo medialia, cum a b. b c. ex diffin. ipsius, sint incommensurabiles: ac potentialiter tantùm commensurabiles, quia scilicet, potia rationales, sicut omnia ex diffinitionibus ipsarum irrationalium constat. Propterea, consyderatis sex specierum binomij conditionibus, existente

M n	Binomio	a c erit	pᵘ	Binomium
	Bimediali p°	a c erit	2ᵘ	
	Bimediali 2°	a c erit	3ᵘ	
	Maiori	a c erit	4ᵘ	
	Potẽte rationale, mediũq;	a c erit	5ᵘ	
	Potente duo medialia	a c erit	6ᵘ	

Propositio. 59ª.

a d c b

Omne aggregatum quadratorum inæqualium excedit duplum producti radicum in quadrato differentiæ radicum. Secetur quantitas a b. per inæqualia apud c. & à maiori portione a c. abscindatur ipsi b c. æqualis c d. Atq; ita ostendendũ est, quòd congeries quadratorum a c. c b. supererat duplum ipsius rectanguli a c. c b. in quadrato ipsius d a. quod à Campano in decimo Elementorum ostensum est. Per quartam secundi, quadratum a c. & quadratum c b. cum duplo

rectanguli

rectanguli a c. c b. simul æqualia sunt quadrato a b. Quod per octauam secundi, æquale, est quadrato d a. cum quadruplo rectanguli a c. c b. Auferatur vtrinque duplum rectanguli a c. c b. & supererunt quadratum a c. & quadratum c b. simul æqualia quadrato d a. & duplo rectanguli a c. c b.

Hæc autem est demonstratio.

p 4ª secūdi: □ a c, □ c b, ▭ ▭ a c. c b simul æq̄lia sunt □to a b. Qđ p 8ª 2ª æquale est □ d a, ▭ ▭ ▭ ▭ a c. c b.

Auferatur vtrinque ▭ ▭ a c. c b.
& supererunt

□ a c, □ c b simul æqualia —— □ d a, ▭ ▭ a c. c b.
Et hoc demōstrādū fuit

a d c b

PROPOSITIO 60ª.

Singularum residui specierum radices, sunt ipsę singulæ irrationales residuales quantitates per ordinem: videlicet Residuum, Residuum mediale primum, Residuum mediale secundum, Minor, cum rationali mediale totum potens, & cum Mediali mediale totum potens. Repetam descriptionem, supposita & demonstrata 57ª præcedentis. Hoc solùm mutato, vt pro aggregato membrorum a b. b c. sumatur eorundem differentia, qua valet maius membrum a b. excedit minus b c. Nam si aggregatum supponitur binomium: iam per diffin. differentia erit Residuum eiusdem speciei. Item pro aggregato portionum m n. (quod aggregatum erat radix ipsius a b c. binomij) sumatur differentia earundem m n. qua scilicet maior portio m. superat minorem n. Quæ differentia erit irrationalis quantitas residualis illius quantitatis, quam cōflabant portiones m n. per diffinitionem. Ostendam igitur, quòd sicut ipsius aggregati a b c. radix fuit ipsum aggregatum m n. ita differentiæ ipsarum a b. b c. radix erit differentia ipsarum m n. Sic, cum ipsius m. quadratum sit a l. atq; ipsius n. quadatum sit l b. iam a b. erit aggregatum duorum quadratorum inæqualium, quorum radices m n. Sed b c. fuit duplum producti talium radicum: igitur, per præcedentem, ipsa a b. excedit ipsam b c. in quadrato differentiæ earundem radicum, hoc est, differentia ipsarum a b. b c. est quadratū differentiæ ipsarum m n. Et perinde hæc differentia erit radix illius. Quamobrem per demostrata in 57ª.

d f e

a k l b c g

m n h

præcedenti,

præcedentis, si illa differentia fuerit residuum primæ speciei: hæc differentia erit residuum.

Si illa, Residuum 2^e speciei, hæc Residuũ mediale primũ.

Si illa, Residuũ 3^e speciei, hæc Residuũ mediale secũdũ.

Si illa, Residuum 4^e speciei: hæc irrationalis, quæ Minor.

Si illa, Residuum 5^u, hæc cum rationali mediale potens.

Si illa, residuum 6^u, hæc cum mediali mediale potens.

Et hoc est, quod demonstrandum proponebatur.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd compertis per 57^a pręcedentem, sex irrationalibus quantitatibus prædictis, quę singulæ ex binis membris constant inæqualibus: Iam eorundem mẽbrorum differentiæ singulæ erunt Residuales quantitates prædictarum bimembrium. Item si bimẽbribus sua singulis quadrata attribuantur (quæ binomia sunt) talium binomiorum Residua erunt singula singularum dictarum Residualium quadrata.

PROPOSITIO 61^a.

Sex irrationalium quantitatum residualium, scilicet Residui, Residui medialis primi, Residui medialis secundi, Minoris, Cum rationali mediale potentis, Cum mediali mediale potentis, singularum per ordinem, singula quadrata sunt singulæ sex species Residui. Sicut præcedens sequitur ex demõstratis 59e & 57e Ita præsens propositio similiter ex ijs, quę in 59^a & 58^a ostensa sunt, constabit.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, quòd Binomij, & Residui habentium æqualia nomina, radices inter se habent etiam æqualia nomina: & è contrario, Binomium & Residuum, quorũ radices habent æqualia nomina, sortiuntur etiam inter se nomina æqualia. Idemque de nominibus proportionalibus dicendum. Nam æqualitas nominum in quadratis, facit æqualitatem nominum in radicibus: & è contrario. Proportio verò proportionem, sicut per processum demonstrationis 57^æ & 58e constare potest. Nunc exponam hìc sex species binomiorum, & totidem earum radices, quæ sunt sex irrationales quantitates.

Binomia

Binomia ſex ...... Quarũ radices ſunt totidẽ irrõeles quantitates.ſ.bimẽbres.
Primum 7 p̃.r.40...... Binomium r.5.p̃ r.2
Secundum r.18.p̃.4.... Bimediale primum.rr.8.p̃.rr.2.
Tertium r.27.p̃.r.24.. Bimediale ſecundum rr.12.p̃.rr 3.
Quartum 6.p̃ r.8...... Maior r.v.3.p̃.r.7.p.r.v. 3.m.r.7.
Quintũ r.32.p̃.4...... Potens rationale & mediale r.v. r.8. p̃.2.p̃ r.v. r. 8. m̃. 2.
Sextum r 24. p̃.r 8..... Potens duo medialia r v. r 6.p̃.2. p̃ r v.r.6.m̃.2.

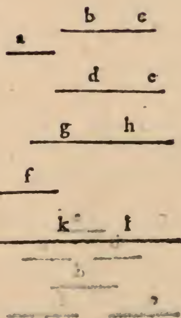
Ex quibus, per abſciſſionem minoris membri à maiore, fient tam in Binomijs, quàm in eorum radicibus, totidem Reſidua, hoc pacto.

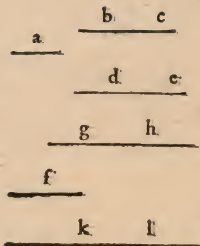
Reſidua ſex...... Quorum radices, totidem Reſiduales irrationales ſcilicet.
primum 7.m̃ r.40 ....Reſiduum r 5 m̃.r.2.
Secundum r.18 m̃.4..Reſ. mediale primum rr 8.m̃.rr.2.
Tertium r.27 m̃.r.24.Reſi. mediale ſecundũ rr.12.m̃.rr 3.
Quartum 6.m̃.r 8 ... Minor r.5. 3.p̃ r.7 m̃ r v. 3.m̃ r 7.
Quintum r.32.m̃.4...Cum rationali mediale potens. r.v r.8.p̃ 2. m̃ r.v.r.8.m̃.2.
Sextum r.24.m̃.r.8. .Cum mediali mediale potens. r.v.r.6. p̃ 2.m̃.r.v.r.6.m̃. 2.

Sic habes exempla practica eorum, quæ demonſtrata ſunt.

Propoſitio 62ª.

Omnis quantitas rationalis multiplicans Binomium per Reſiduum, producit etiam Binomium vel Reſiduum eiuſdem ſpeciei, ac multiplicato commenſurabile. Rationalis quantitas a. multiplicet Binomiũ b c.& producat quãtitatem d e. aio, q̃ d.e. Binomiũ eſt ipſi b c. binomio cõmẽſurabile, & eiuſdẽ ſpeciei. Vt ſi, exẽpli gratia, b c. ſit binomiũ primũ: tũc d e. erit binomiũ pᵘ. Sint enim ipſius b c. binomij mẽbra b c. & ex a. in b. fiat d. ex a. in c. fiat e. Sic enim, per primam ſecũdi, erit d e. totũ, quod fit ex a in b c. Itaque cùm b c. ſit binomium primum, erit per diffin. b. maius membrum rationale atque c. reliquum potẽtialiter tantùm rationale: Cumq; a. rationalis in ſingulas b c. quantitates faciat ſingulas d e. iã per 49ª huius, ipſa d. erit rationalis, & ipſa e. potentia tantùm rationalis: & totum d e. toti b c. commenſurabile. Item ſit ipſius a. quadratum f. quod rationale erit: atque ipſarum b c. quadrata ſint g h. Mox f. multiplicans ipſas g h. producat ipſas k l. eruntq; per coroll. vndecimæ huius, k l. quadrata ipſarũ d e. Cumq; per primam ſexti, ſit ſicut g. ad h. ſic k. ad l. erit euerſim ſicut g. ad exceſſum, quo excedit ipſam h. ſic etiam k. ad exceſſum, quo excedit ipſam l. Verùm g. ad ſuum exceſſum eſt ſicut numerus quadratus ad numerum quadratũ, p 52ª huius: quoniã per diffinitionẽ primi binomij, b. portio excedit c. portionem potentialiter, exceſſu, cuius radix eſt commenſurabilis ipſi b. Qui exceſſus eſt differentia ipſarum g h. & perinde talis exceſſus ſe habet ad g. ſicut numerus quadratus ad numerum quadratum per 52ª. Igitur k. ad ſuũ exceſſũ ſe habebit ſicut nũs quadratus ad numerũ quadratũ.





Quare per 53ª ipsa d. potentior erit quàm e. excessu, cui⁹ radix est commensurabilis ipsi d. Cũ ipsarũ d e. potentiæ sint k l. Itaque per diffinitionem totum d e. binomium primum est, ipsi iã b c. cõmensurabile, quod erat demonstrandũ. Similiter pro Binomio secundo, & pro tertio procedemus. Et pro quarto & quinto & sexto ostendemus, quòd maior portio potentior est minori in quadrato radicis sibi incõmensurabilis: syllogizãtes per p^a sexti, & per portionẽ versam. Sed per 52^a & 53ª adducemus duo corollaria sequẽtia, quæ agũt de incõmensurabilibus: quandoquidẽ, in 4° & 5° & 6°, binomijs, maior portio potentior est minori in quadrato radicis sibi incõmensurabilis. Itẽ pro tertio & sexto binomijs, in quibus portiones sũt potentia tm̃ rationales, ad ostendendã portionũ ipsarum incõmensurabilitatem, citabimus 48ª huius. Similiter, si a. rationalis multiplicet Residuum, cuius membra sũt b c. ac producat d e. ostendemus ꝙ d e. est residuum ipsi b c. commensurabile, eiusdem speciei. Quod enim demonstratur de membris binomij, demonstratur de membris correllatiui residui: quandoquidem in diffinitionibus sortiunt easdem conditiones. Recte igitur idem de vtroque proponitur demonstrandum.

PROPOSITIO 63^a.

Omnis quantitas Rationalis multiplicans quamlibet irrationalium quantitatum, siue bimembrem, siue eius corellatiuã residualem, producit eiusdem generis irrationalem, ac multiplicatæ commensurabilem. Hæc est generalior præmissã: ibi enim de Binomio, ac residuo: hic vero de qualibet duodecim irrationalium agitur. Itaque sit exempli gratia, rationalis a. quæ multiplicet b. bimediale secundum, & producat c. Aio, ꝙ c. est Bimediale secundum & ipsi b. commensurabile. Sit enim ipsius a. quadrato d. quod rationale erit, atque ipsius b. quadratum sit e. quod, per quinquagesimamoctauam huius, erit Binomium tertiũ: Deinde d. multiplicans e. faciat ipsam f. eritq; f. per præcedentẽ, binomiũ tertiũ. Sed per corollariũ 11e huius f. quadratum est ipsius c. ergo per 57^a huius c. radix ipsius f. binomij tertij, erit bimediale secundum, qđ fuit propositum. Eadem penitus argumentatione vteris pro reliquis irrationalium generibus, tam bimembribus, quàm residualibus. Sed in residualibus, pro quinquagesima octaua, & 57 citabis sexagesimam primam, & sexagesimam, quę de residuis loquuntur: itaque constat veritas propositionis.

PRO-

PROPOSITIO. 64ª.

Omnis quantitas commensurabilis cuipiam ex irrationalium ordine, est eiusdem generis irrationalis. Et habet eidem proportionalia & commensurabilia nomina. Esto à quantitas, quæpiam, vel potentia tantùm rationalis, vel medialis, vel bimẽbris, siue residualis: ipsiq; a. commensurabilis esto b. Aio, quòd b. est eiusdem generis irrationalis, cuius a. Diuidatur enim b. in ipsam a. & proueniat c. eritque per 51ª huius c. rationalis. Cùm verò quotiẽs in diuisorem producat diuisum, iam c. multiplicans a. facit ipsam b. Rationalis autem c: Igitur per 49ª huius, si a. sit vnimembris quantitas, si bimembris, vel residualis, per præcedentem, erit b. eiusdem generis, cuius a. & eidem commensurabilis: quod est propositum. Quòd autem b. habeat nomina proportionalia & cõmensurabilia nominibus ipsius a. constabit, si qua secatur a. eadem rõne in mẽbra secetur & b. qđ erat propositionis reliquũ.

a

c

b

PROPOSITIO. 65ª.

Omnis quantitas irrationalis diuisa per quamuis rationalem, exhibet in quotiente quantitatem sibi cognominem & commensurabilem. Exempli gratia, b. quantitas irrationalis, siue vnimembris, siue bimembris, siue residualis, diuidatur per c. rationalem, & proueniat a. Dico, quòd a. est eiusdem generis, cuius b. & ipsi commensurabilis. Nam cùm diuisor in quotiẽtem producat diuisum: iam c. in a. ducta, faciet ipsam b. Ducatur igitur c. in ipsam d. sibi æqualem, & producat ipsam e. eritque e. rationalis: & per primam sexti, sicut d. ad a. sic e. ad b. Et permutatim, sicut d. ad e. sic a. ad b. Commensurabilis autem est d. ipsi e. quoniam vtraque rationalis. Igitur per 48ª huius, & a. commensurabilis ipsi b. quare, per precedentem, erit & a. eiusdem generis, cuius ipsa b. supponebatur. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO 66ª.

Omnes duæ quantitates inuicem commensurabiles coniunctæ, conficiunt eiusdem generis quantitatem & sibi commensurabilẽ. Sunto a b. quantitates inuicem commensurabiles: Aio, quòd totum a b. erit quantitas eiusdem generis, & vtrique ipsarum a b. commensurabilis. Quòd enim a b. totum ipsis a b. singulis est commensurabile, constat, per quadragesimam sextam huius. Quòd autem eiusdem generis cum ipsis. constat per pręmissam sexagesimam quartam: constat ergo totum propositum.

COROLLARIVM.

Vnde manifeſtum eſt, quòd aggregatum ex quotcunque quantitatibus inuicem commenſurabilibus, eſt ſingulis partibus commenſurabile & eiuſdem generis cum eiſdem.

PROPOSITIO 67^{a}.

Omnis quantitas potentialiter commenſurabilis alicui ex irrationalibus, eſt eiuſdem generis quantitas. Sit exempli gratia, quantitas a. bimediale ſecũdum: ſitq; ipſi a. potentialiter cõmenſurabilis ipſa b. Aio, quòd b. eſt etiam bimediale ſecundum. Sunto enim quadrata ipſius a. ipſa c. atque ipſius b. ipſa d. Eritque, per 58ª huius, c. binomium tertium: commenſurabilis autem eſt per hyp. ipſi c. ipſa d. Igitur per 64ª huius d. binomium tertium eſt. Sed ipſius d. radix ipſa b. eſt. Ergo, per 57^{a} b. bimediale ſecundum erit. quod fuit demonſtrandum. Similiter in cæteris irrationalibus, tam bimembrib⁹, quàm reſidualibus conſtabit propoſitum.

PROPOSITIO 68^{a}.

Omnis quantitas potentia rationalis multiplicans aliquam ex irrationalibus, producit eiuſdem generis quantitatem. Exempli gratia, a. quantitas potentia rationalis multiplicet b. bimediale ſecundum, & producat c. Aio, quòd c. eſt bimediale ſecundum. Nam, per diffi. multiplicationis, ſicut eſt a. multiplicans ad poſitam rationalem, ſic c. productum ad b. multiplicatam. Sed a. potentialiter commenſurabilis eſt poſitæ rationali per hyp. igitur per 48ª huius & c. ipſi b. potentialiter commenſurabilis eſt. Cumq; b. ſit bimediale ſecundum, erit, per præcedentem, & c. bimediale ſecundum. quod fuit oſtendendum. Non aliter in ſingulis cæteris vtriuſque ordinis irrationalibus conſtat propoſitum.

PROBOSITIO 69^{a}.

Omnis quantitas irrationalis diuiſa in quantitatem potentia rationalem, exhibet in quotiente quantitatem ſibi cognominem. Exempli gratia, quantitas a. potẽtia tm̃ rationalis, diuidat b. bimediale primum, & proueniat c. aio, ꝙ c. eſt bimediale primum. Nam per diffin. diuiſionis, ſicut eſt diuiſor ad poſitam rationalem, ſic eſt b. diuiſa, ad c. quotientem. Sed a. potentialiter commenſurabilis eſt poſitæ rationali per hypoteſim: ergo & b. potentialiter commenſurabilis

eſt

est ipsi c. per 48[a] huius. Sed b. bimediale primum. Igitur vt c. bimediale primum per 66[a] præmissam. quod fuit ostendendum. Et eodem syllogismo per singula irrationalium genera repetito, constat propositum.

PROPOSITIO 70[a].

Duæ quantitates bimembres eiusdem generis inuicem commensurabiles, per ordinem sex irrationalium sumptæ, inter se multiplicatæ, producunt singulas binomij species. Quod 58[a] propositio de quadrato, hæc de producto irrationalium concludit. Sunto, exempli gratia, a b. singulæ quantitates bimedialia secunda, inuicem commensurabilia. Quarum punctum sit c. aio, quòd c. est binomium tertium. Sit enim ipsi æqualis quantitas d. & ex a. in d. fiat e. Eritq; e. quadratum ipsius a. & perinde binomium tertiũ per 58[a] huius. Et quoniam, per primam sexti, sicut b. ad d. sic c. ad e. & ipsa b. ipsi d. per hyp. commensurabilis est. idcirco, per 48[a] huius, & c. ipsi e. commensurabilis erit: Sed e. binomium tertium: ergo, per 64[a] & c. binomium tertium est. quod fuit demonstrandum. Quòd si a b. ponantur binomia commensurabilia, erit e. binomiũ primũ. Si autem a b. bimedialia prima commensurabilia: hinc e. binomium secundum. Si maiores, binomiũ quartum. Si potentes rationale ac mediale, binomiũ quintum: si potentes duo medialia, binomium sextum esse demonstrabitur: sicut propositio concludit.

a

b d

c e

PROPOSITIO 71[a].

Duæ quantitates residuales eiusdem generis inuicem commensurabiles, per ordinem sex generum sumptæ, inter se multiplicatæ, producunt singulas residui species. Quod 61[a] propositio de quadrato, hæc præsens de producto residualium concludit. Itaque sicut præcedens ostensa est per 58[a] & 48[a] & 64[a]. ita præsens propositio per 61[a] 48[a] & 64[a] eodem processu & descriptione demonstrabit.

PROPOSITIO 72[a].

Duæ quantitates bimembres eiusdem generis potentialiter inuicem commensurabiles, inter se multiplicatæ, producunt binomia. Exempli gratia, sunto a. & b. bimedialia secunda potentialiter inter se commensurabilia, & ex a. in b. fiat c. aio, quòd c. binomium est. Ponatur enim d. ipsi æqualis, & ex a.

c
b d
c e

in d. fiat e. quod per 58ª erit binomium. Verùm per primam sexti, sicut b. ad d. sic c. ad e. & b. commensurabilis potentialiter ipsi d. igitur, per 48ª & c. commensurabilis potentialiter ipsi e. Sed e. binomium: ergo, per 67ª huius, c. binomium erit: quod fuit ostendendum. Similiter siue a b. sint binomia, siue bimdialia prima, siue ex tribus genetibus reliquis esse supponantur, semper c. binomium demonstrabitur.

a
b d
c e

PROPOSITIO 73ª.

Duæ quantitates residuales eiusdem generis inuicem potentia commensurabiles, inter se multiplicatæ, residuum producunt. Exempli gratia, a. & b. residua medialia secunda inuicem potentialiter commensurabilia: & ex a. in b. fiat c. Aio, quod c residuum est. Ostenditur hęc omnino sicut præcedens: hoc excepto, quòd pro 58ª, citanda est 61ª, quippe quæ de residualibus agit.

PROPOSITIO 74ª.

Omne binomium in Residuum eorundem nominum multiplicatum, producit quantitatem rationalem. Esto binomium, cuius maius membrum a b. minus verò b c. Mox ipsi c b. æqualis esto b d. eritque ad residuum eorundem nominum, hoc est excessus eorundem membrorum. Itaque ostendendum est, quòd si c a. binomium multiplicetur in a d. producetur quantitas rationalis. Cum enim a c. sit aggregatum quantitatum duarum a b. b c. atque a d. sit differentia eorundem, constatque per quintam secundi Elementorum, quòd ex ductu aggregati radicum in differentiam eorum producatur differentia quadratorum: Iam illud, quòd fuit ex a c. in ipsam a d. erit excessus, quo □. ipsius a b. excedit quadratum ipsius b c. Verùm, per diffin. binomij huiusmodi quadrata rationalia sunt; igitur talis excessus rationalis est. Quare rationale est, quod fit ex a c. in a d. quod fuit demonstrandum.

a d b c

PROPOSITIO 75ª.

Omne binomium in Residuum proportionalium & commensurabilium nominum multiplicatum, producit quantitatem rationalem. Sunto duo binomia & residuum a. & b. quorum nomina maius maiori, & minus minori proportionalia,

sint

ſint & cõmenſutabilia, & ex ductu a.in b.fiat c. Aio, quòd c. rationale eſt. Ponatur ipſi binomio æqualia nomina habens d. reſiduum: & ex a. in d. fiat e. quòd per præcedentem erit rationale. Cum autem b d. ſicut reſidua proportionalium & commenſurabilium nominum, erunt b d. inter ſe commenſurebilia: ſed per primam ſexti, ſicut b.ad d. ſic c. ad e. Igitur per quadrageſimam octauam huius, c. commenſurabilia ipſi e. Cumque e. ſit rationalis, erit & c. rationalis. Sicut demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO 76ª.

Si Binomium multiplicans aliquam quantitatem, produxerit quantitatem rationalem: multiplicata quantitas reſiduum eſt, cuius nomina proportionalia, & commenſurabilia ſunt binomij nominibus. Binomium a. multiplicet b. quantitatem, & producat c. rationalem. Aio, quòd b. Reſiduum, eſt cuius nomina proportionalia ſunt & commenſurabilia ipſius a. binomij nominibus. Ponantur enim d. Reſiduum eorundem nominum, ſiue commenſurabilium, & proportionalium cum nominibus a. binomij. & ex a. in d. fiat e. eritque per præcedentem, vel ante præmiſſam ipſa e. Rationalis. Sed per primam ſexti, ſicut c. ad e. ſic c. ad d. commenſurabilis: eſt autem c. ipſi e. quia ſunt rationales. Ergo per quadrageſimam octauam huius, b. commenſurabilis ipſi d. Fuit autem d. reſiduum: igitur per 64ª & b. reſiduum & commenſurabilium nominum ipſi d. Sed nomina ipſius d. commenſurabilia nominibus ipſius a. binomij, & proportionalia: itaq; & ipſius b. reſidui erunt eiſdem commenſurabilia & proportionalia: quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO 77ª.

Si Reſiduum multiplicans aliquam quantitatem fecerit quantitatem rationalem, multiplicata quantitas binomium eſt, cuius nomina proportionalia ſunt, & commenſurabilia reſidui nominibus. Hæc in eadem omnino deſcriptione, & eodem proceſſu demonſtratur: Hoc excepto, quòd vbi ponebatur binomium, ponatur reſiduum, & è contrario.

a
b d
c e

a
b d
c e

PROPOSITIO 78ª.

Omnis rationalis quantitas diuisa in binomium, exhibet in quotiente residuum, cuius nomina commensurabilia sunt, & proportionalia ipsius binomij nominibus. Exempli gratia, rationalis quantitas c. diuidatur per a. binomium, & proueniat b. Aio, quòd b. residuum est, cuius nomina commensurabilia sunt & proportionalia ipsius a. binomij nominibus. Nam cùm diuisor a. in quotientem b. producat diuisam c. sitque binomium, & c. rationalis: iam, per 76ª praecedentem, b. residuum erit nominum commensurabilium & proportionalium ipsius a. binomij nominibus. quod est propositum.

a
b
c

PROPOSITIO 79ª.

Omnis rationalis quantitas diuisa in residuum, exhibet in quotiente binomium, cuius nomina incommensurabilia sunt & proportionalia ipsius residui nominibus. Sicut praecedens per 76ª praemissam, ita praesens per 77ª demonstratur.

PROPOSITIO 80ª.

a b c d e f
g h k l m n

Binomia, quarum radices habent inuicem proportionalia & commensurabilia nomina, sortiuntur quoque proportionalia inter se & commensurabilia nomina. Sint, exempli gratia, a b c. d e f. binomia tertia, quorum maiora membra a b. d e. minora verò b c. e f. deinde sumantur horum binomiorum radices. sitq; ipsius a b c. radix g h k. & ipsius d e f. radix l m n. per 57ª huius eruntque per eandem g h k. l m n. bimedialia secunda: Sint ergo talium bimedialium membra, maiora quidem g h. l m. minora verò h k. m n. Et supponatur vt g h. ipsi l m. Atque h k. ipsi m n. comparatum, proportionalia sint & commensurabilia. Dico hinc, quòd & binomiorum a b c. d e f. ipsum membrum a b. ipsi d e. atque ipsum b c. ipsi e f. comparatum, proportionalia sunt & commensurabilia; quod sic ostenditur. Quoniam quantitas g k. l n. habent membra commensurabilia, & proportionalia, maius maiori, & minus minori, erunt coniunctim & totum toti proportionalia, & per quadragesimam octauam huius, commensurabilia. Igitur, per quinquagesimam secundam huius, ipsorum g h. l n. quadrata, scilicet, a c. d f. erunt sicut numerus quadratus ad numerum quadratum inter se, & ideo commensurabilia: & idcirco per sexagesimam

gesimamquartam huius, habebunt membra inuicem proportionalia & commensurabilia, scilicet a b. ipsi d e. atque b c. ipsi e f. quod est propositum. Similiter in cęteris binomiis, & eorum radicibus constabit id, quòd demonstrandum proponitur.

Propositio 81ª.

Residua, quorum radices habent inuicem proportionalia & commensurabilia nomina, sortiuntur etiam proportionalia inter se et commensurabilia nomina. Quod in præcedenti de binomijs eorumque radicibus, quæ sunt bimembres quantitates, ostensum fuit: hic similiter penitus demonstrabitur de residuis, eorumque radicibus, quæ sunt Residuales quantitates. Quandoquidem eadem sunt Residualium, quæ Bimembrium nomina; quæ coniuncta, bimembres; ablata vero minus à maiori residuales quantitates faciunt.

Propositio 82ª.

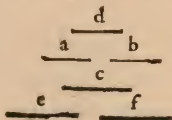
Omnis irrationalis bimembris quantitas multiplicans residualem quantitatem eorundem, siue proportionalium & commensurabilium nominum, producit quantitatem potentia rationalem, & quandoque rationalem. Sunto, gratia exempli, a. bimediale secundum: & b. residuum mediale secundum eorundem, siue proportionalium & commensurabilium inuicem membrorum: multiplicet autem ipsa a. ipsum b. & producat c. Aio, quòd c. est potentialiter rationalis, siue quandoque simpliciter rationalis. Quod sic patet. Sit ipsius a. quadratum d. & ipsius b. quadratum e. Eritque per 58ª huius, d. binomium tertium. Atque e. residuum tertium per 61ª fiat: ergò ex d. in e. quantitas f. Et quoniam a b. habent per hyp. proportionalia & commensurabilia inuicem nomina: iam eorum quadrata d e. per pręcedentem & antepræmissam habebunt inter se proportionalia & commensurabilia nomina. Quamobrem, per 74ª, vel 75ª huius, d. binomium multiplicans e. binomium, producit quantitatem rationalem. Igitur f. rationalis est, & ideo c. quæ per corollarium 11ᵉ. huius, est radix ipsius f. potentialiter rationalis est. Et si f. fuerit quadratus numerus, tunc & c. magnitudine rationalis erit. quod fuit demonstrandum. Similiter idipsum

a b
c
d e
f

ſum de quauis bimembri quantitate,ſuaque reſiduali oſten detur ſicut propoponitur.

PROPOSIDIO 83ª.

Si binomium ſecetur per Reſiduum proportionalium & commenſurabilium nominum, proueniet ex diuiſione Binomium primum. Eſto a. reſiduum. b verò binomium: quorum nomina nominibus proportionalia & commenſurabilia, maius maiori, & minus minori. Secetur autem b. in ipſum a.& proueniat c. Aio,quòd c. binomium primum erit.Ponatur enim d.binomium, cuius nomina ipſius a. reſidui nominibus, ſingula ſingulis ſint æqualia: & ex d. in a.proueniat e. eritque per ſeptuageſimamquartam harum, e.rationalis.Item ex d.in b.fiat f. eritque,per ſeptuageſimã præmiſſam f. binomium primum: quandoquidem d b. ſunt binomia inuicem commenſurabilia. Cumque per primam ſexti, ſicut a. ad b. ſic e. ad f. Iam idcirco, ſi ſecetur f. in e. proueniat c.quæ proueniebat ex diuiſione ipſius b. in a.Verùm e. rationalis fuit,atque f. binomium primum: igitur & c. per ſexageſimamquintam huius,binomium primum erit, quod erat demonſtrandum.

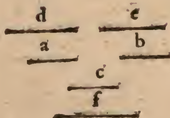


PROPOSITIO 84ª.

Si reſiduum ſecetur per binomium proportionalium & commenſurabilium nominum, proueniet ex diuiſione reſiduum primum. Hæc præſens, oſtenditur ſimiliter per eadem, ſicut premiſſa: ſed vbi in premiſſa ponitur reſiduum, hìc ponatur binomium, & è contrario: & pro 70ª citetur 71ª, quæ loquitur de reſidualibus. Quibus exceptis deſcriptio eſt eadem.

PROPOSITIO 85ª.

Si quælibet bimembris quantitas ſecetur per reſidualem quantitatem proportionalium & commenſurabiliũ nominum, proueniat ex diuiſione tali Binomium. Exempli gratia,ſit a.Reſiduũ mediale ſecundum atque b.bimediale ſecundum proportionalium inuicem,& commenſurabilium membrorum.Deinde ſecetur b.in ipſum a.& proueniat c. Aio,quòd c.binomiũ erit. Sunto enim ipſorum a b. quadrata d e. eritque per 61ª d.reſiduũ tertium,& per 58ª e. binomium tertiũ: per 80ª & & 81ªm premiſſas proportionalium & commenſurabilium nominum.Itaque ſecetur e.in d. & proueniat f. eritque per ante-



antepremissam f. binomium primum. Sed per corollar. 11ª huius, ipsius f. radix est c. igitur per 57ª huius c. binomium est, quod est propositum. similiter, si a. quæcunque residualis, & b. eius bimembris quantitas proportionalium & commensurabilium membrorum supponatur, semper c. binomium erit. Sicut demonstrandum proponitur.

Propositio 86ª.

Si qualibet residualis quantitas secetur per bimembrem quantitatem proportionalium & commensurabilium nominum: proueniet ex diuisione tali residuum. Ostendetur hæc non aliter, quàm præcedens. Sed vbi in præmissa proponitur residualis quantitas, hìc ponatur bimembris, & è contrario: & pro 82ª & 57ª citandæ sint, 83ª & 60ª, & descriptio maneat eadem.

Propositio 87ª.

Impossibile est, binomium alibi, quàm in suo puncto diuidi, seruata membrorum diffinitione. Esto binomium constans ex membris a b. maiori, b c. minori, vt diffinitio exigit. Aio, quod impossibile est ipsum a c. binomium alibi, quàm in puncto b. secari, vtpote in puncto d. ita vt a d. d c. membra sint rationalia & potentialiter tantum commensurabilia. Quod sic constat. Sit binomium a c. primum, secundum, quartum, vel quintum: in quo vna portionum a b. b c. rationalis est: & tunc, si punctum d. fuerit in portione rationali, erit iam portio a d. rationalis: sed d c. bimembris, nam constabit ex d b. rationali, & b c. potentialiter tantum rationali: non igitur erit d c. potentia rationalis, vt postulat binomij diffi. Si verò punctum d. fuerit in portione b c. potentia tantum rationali: cogetur aduersarius facere ipsam a d. rationalem: Vnde b d. rationalis erit, cùm a b. sit per hyp. rationalis. Sed b c. potentia tantùm retionalis: ergo d c. residuum, & nequaquam potentia rationalis. Hoc autem pro binomiis primo ac quarto, in quibus portio maior a b. rationalis supponitur. Pro secundo aût ac 5º in quibus b c. portio minor rationalis supponitur transferes syllogismum. Pro tertio autem & sexto binomijs, in quibus vtraque portio potentialiter tantum rationalis est, sic procedam.

Ponantur

Ponantur membrorum a b.bc.quadrata ſimul ſumpta conficere quantitatem e f. duplum autem eius, quod fit ex a b. in b c. ſit quantitas f g. Vnde per quartam ſecundi Elementorum, totum e g. erit quadratum ipſius a c. vnde, cum a c. ſit binomium, erit, per 58ª huius, e g. binomium primũ. Itaque ſi a b c. binomium ſuſcipit in alio, quàm b. puncto, vt in d. diuiſionem: tunc aggregatum quadratorum a d. d c. ſit e h. eritque reliquum h g. duplum eius, quod ex a d. in d c. Cumque ex demonſtratione 58ª huius, e h. h g. ſint membra ipſis e g. binomij: ſequetur, vt ipſum e g. binomium primum ſecetur in alio, quàm f. puncto: quod dudum impoſſibile oſtenſum fuit. Quæ demonſtratio non ſolùm pro tertio, & ſexto, ſed etiam pro cæteris inſeruit binomijs.

PROPOSITIO 88ª.

Impoſſibile eſt, quamlibet cæterarum quinque bimembrium quantitatem alibi quàm in ſuo termino diſtingui, ſeruata diffinitione. Quod de binomio præmiſſa concludit, hoc præſens de bimediali primo, ſecundo, cæterisque tribus irrationalibus proponit. Sit in exemplum a b c. bimediale ſecundum: cuius maius membrum a b. minus autem b c. Aio, quòd impoſſibile eſt ipſum a c. bimediale ſecundum, alibi quàm in puncto b. vt pote in puncto d. ita ſecari, vt a d. d c. portiones ſint eiuſdem diffinitionis, cuius erant ipſæ a b. b c. Quod ſic conſtat. Ponatur ipſius a b c. bimedialis ſecundi quadratum e f g. ita, vt e f. ſit cumulus ex quadratis a b. b c. & f g. duplũ producti ex a b. in b c. eritque ex demonſtratione 58ª huius, e g. binomium tertium, cuius membra e f. f g. Quòd ſi a b c. bimediale ſecundum alibi quàm in b. puncto, vt in d. patitur diuiſionem: tunc per 57ª ponetur aggregatum ex quadratis a d. d c. ipſum e h. & reſiduum f g. duplum eius, quod ex a b. in b c. ita vt ipſum e g. binomium tertium alibi, quàm in f. puncto in membra ſuæ diffinitionis diſtinguatur, quod, per præcedentem, eſt impoſſibile. Et perinde impoſſibile erit ipſum a b c. bimediale ſecundum alibi quàm in b. puncto diſtingui. quod fuit propoſitum. Quod & de reliquis reſidualibus ſimiliter conſtabit.

a d b c

e h f g

PROPO-

PROPOSITIO 89ᵃ.

Impossibile est residuum esse excessum aliorum, quàm suorum membrorum, seruata eius diffinitione. Sunto residui mēbra, maius quidem a b. minus verò b c. ita vt eorum excessus c a. sit ipsum residuum. Aio igitur, quòd a c. non potest esse excessus aliorum membrorum quàm a b. b c. ita vt membra talia sint rationalia, & potentialiter commensurabilia. Sint enim, si possibile est, talia membra a d. d c. vt eorum excessus; sit dictum a c. residuum. Et tunc si maius membrum a d. sit rationale, sicut in primo, vel quarto residuo, cum & a d. vt supponitur, rationale sit; erit eorum differentia b d. rationalis: verùm b c. potentia tantùm rationalis per diffinitionē binomij primi vel quarti. Igitur d c. binomium est, non autem potentia rationalis, quod est supposito contrarium. Astruitur ergo propositum. Quòd si minus membrum b c. sit rationalis, vt in secundo, & quinto residuo, tunc rursus b d. rationalis: sed a b. potentia tantùm rationale, per diffin. secundi, vel quinti binomij: ergo a d. binomium, non potentialiter rationalis est. Quod supposito contradicit. Constat igitur proposita impossibilitas: & hoc, quando a d. ponitur maior, quàm a b. Quando verò minor, scilicet cùm punctum d. ponitur inter puncta b c. tunc arguetur similiter, vel a d. vel d c. esse residuum: quod similiter supposito aduersarij refragatur. Sic quo ad primum, secundum, quartum, & quintum residuum, constat propositum. Quo ad tertium verò, sextumque residuum, sic procedam. Ponam e f. aggregatum ex quadratis ipsarum a b. b c. Item f g. duplum eius, quod fit ex a b. in b c. Eritque per quinquagesimam nonam huius, e g. quadratum ipsius a c. siue, quod idem est, a c. radix ipsius e g. Cumque a c. sit tertium, vel sextum reresiduum, erit, per sexagesimamprimam e g. residuum primum. Itaque, si a c. residuum fit per alia, quàm a b. b c. membra, vtpote per a d. d c. tunc aggregatum ex quadratis ipsorum a d. d c. sit e h. duplum verò eius, quod ex a d. in d c. sit h g. Cumque ex demonstratione sexagesimæprimæ, tunc ipsius e g. residui primi membra sint e h. h g. sequitur, vt ipsum e g. residuum primum constet per excessum

a c d b d

e g f h

aliorum

aliorum, quàm e f. f g. membrorum: quod dudum impossibile fuit ostensum. Quę demonstratio non solùm tertio & sexto, sed etiam cæteris residuis vsu venit. Sic constat penitus, quod proponitur.

PROPOSITIO 90[a].

a c b d

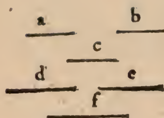
e g f h

Impossibile est quamlibet cæterarum quinq; residualium quantitatum esse excessum aliorum, quàm suorum membrorum, seruata diffinitione. Quod præmissa de Residuo conclusit, hæc præsens de residuo mediali primo, secundo, cæterisque tribus residualibus quantitatibus proponit. Vt si sit, exempli gratia, Residuum mediale secundum, cuius nomen maius a b. minus verò b c. ita vt residuum ipsum mediale secundum sit a c. Aio igitur, quòd a c. non potest esse excessus aliorum, quàm a b. b c. membrorum, vt puta ipsorum a d. d c. ita vt a d. d c. habeant cōditiones diffinitionis ipsius medialis, quas habent a b. b c. Si enim hoc possibile est: tunc aggregatum ex quadratis ipsorum a b. b c. sit e f. duplum verò eius, quod fit ex a b. in b c. sit f g. Eritque per 59[a] huius a c. radix ipsius e g. Cumque a c. sit residuum mediale secundum, erit, per sexagesimamprimam e g. Residuum tertium. Itaque si a c. residuum mediale secundum esse potest excessus aliorum, quàm a b. b c. vt pote ipsorum a d. d c. membrorum: tunc aggregatum ex quadratis ipsorum a d. d c. duplum verò eius, quod ex a d. in d c. sit g h. Eruntque ex demonstratione sexagesimæ primæ tunc ipsius e g. residui tertij membra e h. h g. Quare sequetur, vt ipsum e g. Residuum tertium fiat per excessum aliorum, quàm e f. f g. membrorum: quod per præcedentem impossibile est. Et perinde impossibile erit ipsum a c. Residuum mediale secundum esse aliorum quàm a b. b c. propriorum membrorum excessum, seruatis diffinitionis conditionibus. quod fuit demonstrandum. quæ demonstratio similiter ad reliquas residuales quantitates transfertur. Sic constat penitus propositum.

PROPOSITIO 91[a]

Omnis medialis quantitas multiplicans aliquam irrationalem de numero sex generum, siue bimembrem siue residualē producit

ducit omnino aliquam de numero earundem. Exempli gratia: a. quantitas medialis multiplicet ipsam b. maiorem, & faciat c. Aio, quòd c. est vna sex generum, quibus adnumeratur Maior, videlicet aut binomium, aut bimediale primum, aut secundum, & cætera. Ponatur enim ipsius a. quadratũ d. quod erit potentia rationale, per diffinitionem Medialis. Sit etiam ipsius b. quadratum e. quod per quinquagesimam octauam huius erit binomium quartum. Itaque ipsa d. multiplicet ipsam e. & proueniat f. eritque f. per 68ª harum binomium. Sed per corollarium vndecimę huius f. est quadratum ipsius c. Igitur per quinquagesimam septimam huius c. radix ipsius f. binomij erit vna ex irrationalibus bimembribus sex generum, quod fuit demonstrandum. Similiter si b. ponatur binomium, aut bimediale vtrumlibet, aut altera ex duabus reliquis; semper f. ostendetur esse binomium: & perinde c. vna sex generum bimembrium. Non aliter pro residualibus argumentaberis: sed pro 58ª citabis sexagesima prima: & pro quinquagesima septima citabis sexagesimam, quæ de residuis agunt. Quam ob rem si posuisses b. Minorem, aut qualibet cæterarum quinque residualium, ostendisses f. esse residuum: & perinde c. vnum ex residualium generum numero, quemadmodum demonstrandum proponitur.



PROPOSITIO 92ª.

Omnis medialis quantitas diuidens aliquam ex irrationalibus, siue bimembribus, siue residualibus, præstat in quotiente aliquã de numero eorundem. Hæc similiter omnino demonstratur sicut præmissa: verùm, loco sexagesimæ octauæ citabis sexagesimam nonam, quæ loquitur de diuisione. Et pro corollario vndecimæ adduces corollarium duodecimæ, & pro multiplicatione vtere diuisione, sicut proponitur.

PROPOSITIO 93ª.

Omnis quantitas secundo quadrato commensurabilis alicui irrationali siue de numero bimembrium, siue residualium, est etiã vna de numero earundem. Exempli gratia, sit a. Bimediale primum: & quantitas b. ipsi a. commensurabilis in quadrato secundo. Aio, quòd b. est etiam vna sex generum, ex quibus bimediale primum. Sit eñ ipsius a. quadratum c. & ipsius b.

quadratum

quadratum d. Eruntque c d. potentialiter commensurabiles, quandoquidem earum quadrata sunt secunda quadrata ipsarum a b. per hyp. commensurabilia. Sed c. binomium secundum est, per quinquagesimamoctauam harum: ergo & per sexagesimam septimam binomium erit. Quare ipsius d. radix ipsa b. per quinquagesimam septimam, erit aliqua sex bimembrium. quod erat demonstrandum. Similiter si a. ponatur binomium, vel bimediale secundum, vel aliqua ex tribus reliquis: semper d. binomium esse arguetur, & perinde b. vna sex generum, in quibus binomium numeratur. Eodem syllogismo vteris pro residualibus, dum loco quinquagesimæ octauæ citetur sexagesima prima, & loco quinquagesimæ septimæ vocetur sexagesima, quæ de residuis loquitur, sicut in antepræmissa.

PROPOSITIO 94ª.

Omnis irrationalis quantitas siue de numero sit bimembrium siue residualium, non solùm magnitudine ac potentia irrationalis est, hoc est, quo ad primum quadratum; sed etiam quo ad secundum, quo ad tertium, & quo ad sequentia ininfinitũ quadrata. Nam, quo ad binomium primum, secundum, quartum, & quintum, in quibus vna portionum rationalis, reliqua irrationalis est, patet propositum: cùm enim partes sint inter se incommensurabiles, erit per quadragesimam septimam huius, tam congeries, quàm excessus incommensurabilis toti, & perinde totum irrationale: & quoniam excessus incommensurabilis partibus, erit & excessus etiam irrationalis. Quo fit, vt tam binomium, quàm residuum primum, secundum, quartum, & quintum irrationale sit. Sed pro binomio tertio, & sexto, suoque residuo, ac præ cæteris bimembrium, aut residualium generibus sic procedam. Sit a. bimediale primum, aio, quòd a. irrationale est magnitudine. Exponatur enim eius quadratum b. quod per quinquagesimamoctauam huius, erit binomium secundum: sed binomium secundum dudum irrationale fuit. Igitur a. potentia irrationalis est: quare & magnitudine per postremum corollarium quinquagesimæ tertiæ huius. Et similiter faciam de cæteris generibus tam bimemembribus, quàm residualibus: loco tamen quinquagesimæ octauæ adducta 61ª. Quod autem omnis tam bimembris quàm residualis quantitas

a

b

c

d

quantitas sit potentialiter in infinitum irrationalis, constabit sic. Sit talis quantitas a. eius quadratum b. eiusdem quadratum secundum c. eius quadratum tertium d. & deinceps in infinitum. Quando igitur quantitas a. bimembris est, tunc per quinquagesimam octauam b. erit binomium, atque c. & d. cæteraque in infinitum quadrata semper binomia prima. Quę cùm irrationalia sint, constat propositum. Quando verò quantitas a. residualis supponitur, tunc per sexagesimã primã b. erit residuum. Inde autem c. & d. & sequentia semper quadrata residua prima, & perinde irrationalia, quemadmodum demonstrandum proponitur.

PROPOSITIO 95ª.

Binomium & residuum non solùm inter se magnitudine, sed etiam primo, secundo, & omni deinceps in infinitum quadrato incommensurabilia sunt. Sit a. quoduis binomium. b. autem quodlibet residuum. Aio, quòd a b. & simpliciter, & potentialiter in infinitum incommensurabilia sunt. Nam si b. ipsi a. commensurabilis esset, cùm a. sit binomium, esset & b. binomium per sexagesimam quartam huius: quod est contra hyp. Non sunt igitur a b. commensurabiles, sed incommensurabiles. Deinde sunto ipsorum a b. prima quidem quadrata c d. secunda e f. & deinceps sequentia. Erunq; per quinquagesimam octauam & sexagesimam primam huius, c. binomium, d. autem residuum primi ordinis. Et similiter e. binomium, & f. residuum eiusdem ordinis, quæ sunt inuicem, hoc est, tam c d. quàm e f. & deinceps, incommensurabiles: quoniam scilicet binomium Residuo incommensurabile dudum ostensum est. Igitur potentiæ ipsorum a b. primę, secundæ & sequentes incommensurabiles ad inuicem, sicut proponitur.

a b
c d
e f

PROPOSITIO 96ª.

Bimembris quantitas & residualis non solùm inter se magnitudine, sed etiam potentialiter in infinitum incommensurabiles sunt. Sit a. quęcunque bimembris, b. verò quælibet Residualis. Aio, quòd a b. incommensurabiles ad inuicem sunt: secus enim per sexagesimam quartam huius, essent eiusdem generis: quod est contra hypothesim. Deinde sint ipsarum a b. quadrata prima c d. secunda e f. & deinceps: eruntque per quinquagesimam octauam, & sexagesimam primam c.

a	b
c	d
e	f

binomium, & d. residuum: item e. binomium primum, & f. residuum primum: igitur, per præcedentem, tã ipsa c d. inter se, quàm e f. inter se, & deinceps sequentia inter se, incommensurabilia sunt. Quare ipsorum a b. tam primæ, quàm secundæ, quàm sequentes in infinitum potentia sunt incommensurabiles, sicut demonstrandum proponitur.

COROLLARIVM.

Manifestum est igitur, quòd sicut omnis bimembris de numero sex generum quantitatis, primum quadratum est binomium: secundum verò, tertium & omne sequens in infinitum, semper est binomium primum: ita omnis residualis ex alio senario quantitatis primum quadratum residuum: secundum verò, tertium & quotcunque deinceps, semper est residuum primum. Quod non est parua admiratione dignum.

PROPOSITIO 97.

Quadrata portionum irrationalis lineæ bimembris, quæ maior appellatur, sunt binomium & residuum quartæ speciei. Constat hoc apertè in descriptione & theoria quinquagesimę octauę huius; quando a b c. est binomium quartum m n. est maior. fuit autem ibi a k. potentior quàm k l. in eo, quòd fit ex a l. l b. hoc est, in quarta parte ipsius e f. hoc est, in quadrato, quod ex dimidio ipsius b c. quod dimidium incommensurabile est ipsi a k. quoniam eorum dupla, scilicet a b. b c. membra binomij sunt incommensurabilia: quo fit, vt a k. rationalis potentior sit, quàm k l potentialiter tantùm rationalis in quadrato radicis sibi incommensurabilis: Atque ideo, per diffinitionem, a k l. sit binomium quartum ex membris a k. k l. constans: vtque l b. eorundem membrorum excessus sit residuum quartum. Erat verò a l. quadratum ipsius m. atque l b. quadratum ipsius n. quę sunt membra maioris prędictę, hoc est m. membrum maius: & n. membrum minus. Igitur quadrata talium membrorum, sunt binomium quartum, & residuum quartum. quod fuit demonstrandum.

d f e

a k l b c g

m n h

CORO-

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd tales portiones, quę constituunt Maiorem, sunt etiam ipsę irrationales Maior, & Minor. Hoc est, magna portio est irrationalis, quæ Maior appellatur: parua verò portio, irrationalis, quę Minor dicitur. Nam, cùm quadratum magnę portionis sit binomium quartum, iam per quinquagesimam septimam ipsa magna portio erit irrationalis, quę Maior. Cumque quadratum paruę portionis sit residuum quartum: iam per sexagesimã, ipsa parua portio erit irrationalis, quę Minor. Atque hęc est causa, quòd tales irrationales, Maior, & Minor vocantur: quoniam earum membra singula cadunt sub diffinitionem compositi: vnde & membra singula rursus in portiones homogeneas, & sic deinceps in infinitum (quod mirabile est) secantur.

PROPOSITIO 98ª.

Quadrata portionum Potentis Rationale, ac mediale sunt Binomium ac residuum aliquando quintæ, aliquãdo sextæ speciei.

d f e
a k l b c g
m n h

Nam in descriptione quinquagesimę septimę huius, quando a b c. est binomium quintum, tunc m n. est potens rationale ac mediale. Quadratum autem portionis m. est a l. quadratum autem portionis n. est l b. contigit autem a l. esse binomium quintum vel sextum. atque l b. esse residuum quintum, vel sextum: quod sit patet. Cùm a b c. sit binomium quintum, iam a b. est rationalis potentia tantùm, & idcirco a k. eius dimidium rationalis potentia tantùm. Itaque si k l. sit rationalis, quod tunc contingit, cum d f est numerus quadratus, & perinde g. ipsius d f. quarta pars numerus quadratus: tunc a l. est binomium quintum. Sit autem k l. sit potentia tantùm rationalis, quando videlicet d f. & perinde ipsius quadrans g. non est numerus quadratus: Tunc k l. est binomium sextum. Et eodem modo variatur l b. de residuo quinto in sextum, cùm sit excessus membrorum dicti binomij. Constat ergo propositum.

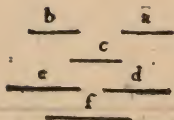
PROPOSITIO 99ª.

Quadrata potentis duo medialia portionum, sunt etiam binomium, etiam Residuum, quinque quintæ & quinque sextæ speciei. Hæc constat eodem penitus modo, quo præmissa in eadem quinquagesimæ sextę descriptione.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd tam potentis rationale ac mediale, quàm potentis duo medialia portiones sunt q̃nque potens rationale ac mediale: Atque cum rationali mediale potens: & quinque sunt Potens duo medialia: Atq; cum mediali mediale potens. Quod corollarium constat ex quinquagesima septima, & 60ª.& ex duabus præmissis.

PROPOSITIO 100ª.



Omnis quantitas potentia rationalis diuisa in binomium, exhibet in quotiente Residuum. Quantitas a. potentialiter rationalis diuidatur per binomium b. &proueniat c. Aio, q c. residuum est. Sit enim quadratum ipsius a. quantitas d. quę rationalis erit. Item, quadratum ipsius b. sit e. quod per quinquagesimam octauam huius, erit binomium primum. Deinde diuidatur d. per e. & proueniat f. quæ per septuagesimam octauam huius, erit residuum nominum commensurabilium nominibus ipsius e .& proportionalium, & perinde Residuum primum. Sed per corollarium duodecimæ huius f. est quadratum ipsius c. hoc est c. radix est ipsius f. Residui primi: igitur, per sexagesimam huius c. residuum est. Quod fuit demonstrandum.

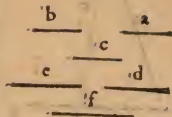
PROPOSITIO 101ª.

Omnis quantitas potentia rationalis diuisa in residuum, exhibet in quotiente binomium. Hæc propositio constat eo modo, quo præcedens. Ita vt loco binomij, Residuum; & pro Residuo, binomium ponatur; & pro septuagesima octaua citetur septuagesima nona: quandoquidem d. rationalis diuidenda est per e. Residuum primum. & pro quinquagesima octaua sumatur sexagesima prima, quæ loquitur de quadratis residualium.

PRO-

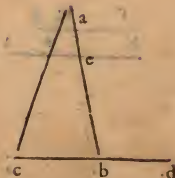
PROPOSITIO 102ª.

Omnis quantitas potentialiter rationalis, diuisa in binominalē, reddit in quotiente residualem correlatiuam: Diuisa verò in residualem, reddit in quotiente binominalem correlatiuam. Idemq́ dicendum de quantitate simpliciter rationali. Exempli gratia, Quantitas a. rationalis simpliciter, siue tantùm potentialiter, diuidatur per b. bimediale secundum, & proueniat c. aio, quòd c. erit residuum mediale secundum. Sit enim ipsius a. quadratum d. quæ rationalis erit: item ipsius b. quadratum e. quod per sexagesimam primam huius, erit binomium tertium. Deinde secetur d. per e. & proueniat f. Eritq; per septuagesimam octauam huius f. Residuum tertium. Sed per corollar. duodecimæ huius, c. radix est ipsius f. igitur per sexagesimam huius, c. erit Residuum mediale secũdum: quod est propositum. Similiter pro cæteris binominalibus procedemus. Quòd si ponatur quantitas a. rationalis diuidi, exempli causa, per b. residuum mediale secundum, atque ex diuisione prouenire c. eodem modo ostendetur c. esse bimediale secundum: sed tunc, pro sexagesima prima citabitur quinquagesima octaua, & pro septuagesima octaua citabitur septuagesima nona, & pro sexagesima citabitur quinquagesima septima, vt suppositis congruit.



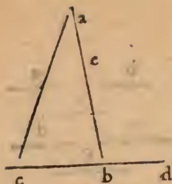
PROPOSITIO 103ª.

Omnis quantitatis secundum extremam, mediamq́ rationem diuisæ, vtraque portio Residuum est, maior scilicet quintum, minor autem primum. Agam per lineas, à quibus argumentum transferri potest ad quoduis quantitatis genus. Ponatur linea rationalis a b. quæ perpendicularis sit ad ipsam c b d. sitque b c. dimidium ipsius a b. coniunctaque a c. ponatur ipsi a c. æqualis c d. & abscindatur de ipsa a b. ipsi b d. æqualis b e. Quod fieri potest: nam a b. b c. simul maius sint, quàm a c. hoc est quàm c d. Sit ergo per vndecimam secundi Elementorum, linea a b. secetur in puncto e. Ita vt rectangulum b a. a e. æquale sit quadrato b e. & perinde a b. b e. e a. sint continuè proportionales: hoc est, vt tota a b. ad maiorem portionem b e. talem habeat rationem, qualem ipsa b e. ad minorem portionem e a. Ostendendum itaque est, quòd existente a b. rationali b e.



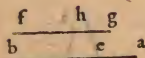
 erit

erit Residuum quintum: & e a. Residuum primum, sic. Quoniam a b. dupla est ad b c. ideo quadratum ipsius a b. quadruplum erit ad quadratum ipsius b c. Sed per penultimam primi Elementorum, quadratum ipsius a c. æquale est quadratis a b. b c. simul sumptis Igitur quadratum ipsius a c. & ideo ipsius c d. quincuplum erit ad quadratum ipsius b c. Cumque b c. per hyp. sit rationalis: erunt d c. potentia tantùm rationalis: & b c. longitudine rationalis: quare, per diffin. harum, excessus b d. Residuum quintum erit: quandoquidem d c potentior quàm c b. in quadrato lineæ sibi incommensurabili: Igitur & b e. ipsi b d. æqualis Residuum quintum erit. Atque ideo, per sexagesimam primam huius, quadratum ipsius b e. erit residuum primum. Est autem quadratum ipsius b e. æquale rectangulo b a. a e. Igitur quod fit ex b a. in ipsam a e. residuum primum est. Sed quod fit ex b a. in a e. diuisum in b a. rationalem, exhibet ipsam a e. Ergo, per sexagesimam quintam huius, a e. quotiens diuisionis, est commensurabilis & cognominis ipsi diuisæ, hoc est, quod fit ex b a. in a e. quod est residuum primum: Itaque a e. Residuum primum est: quod restabat demonstrandum. Quæ demonstratio, ad omnem quantitatem transfertur: sicut infert propositio.



PROPOSITIO 104ª.

Si maior portio quantitatis secundùm extremam mediamq; rationem diuisæ, fuerit rationalis; minor erit Residuum quintum. Sit quantitas f g. vt proponitur, diuisa in partes f h. h g. ponaturque f h. maior portio rationalis. Dico, quòd reliqua g h. erit Residuum quintum. Ponatur enim rationalis quantitas a b. sic diuisa in partes b e. e a. Eritque per præcedentem, maior pars b e. residuum quintum, & reliqua e a. residuum primum. Cumque, propter proportionem similem, sit sicut b a. ad ipsam b e. sic f h. ad ipsam h g. & permutatim, sicut b a. ad ipsam f h. sic b e. ad ipsam h g. atque b a. & f h. sint inter se commensurabiles, quia rationales; erunt per quadragesimam octauam huius, ipsæ b e. h g. inter se commensurabiles: Sed b e. residuum quintum. Igitur per sexagesimam quartam huius, h g. residuum quintum erit. Quod fuit demonstrandum.



PROPO-

PROPOSITIO 105ª.

Si minor portio quantitatis secundùm extremam mediamq́, rationem diuisæ, fuerit rationalis, minor erit binomium quintum.

f h g
k m l

Sit quantitas fg. vt proponitur, diuisa in partes fh. hg. ponaturque minor portio gh. rationalis. Dico tunc, quod fh. maior portio erit binomium quintum. Ponatur enim quantitas kl. similiter diuisa, in km. ml. cuius maior portio km. sit rationalis: eritque, per præcedentem, lm. reliqua portio residuum quintum. Sed propter similem proportionem, sicut lm ad ipsam mk. sic gh. ad ipsam hf. Ergo per decimam quintam sexti, quod fit ex lm. hf. æquale est ei, quod fit ex mk. gh. rationale autem, quòd ex mk. gh. quandoquidem ipsæ rationales. Igitur quod ex lm. hf rationale est. Sic ergo lm. Residuum quintum multiplicans ipsam hf. producit quantitatem rationalem. Quare, per septuagesimam septimam ipsam, hf. multiplicata quantitas, erit binomium quintum: quod ostendendũ proponebatur.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, quòd si tota linea sic diuisa, siue vtralibet portionum ponatur potentia tantùm rationalis; adhuc portiones erunt, quæ dictæ sunt, irrationales, scilicet Residua, & binomium. Nam si duę lineæ, vna rationalis, & altera potentialiter tantùm rationalis sic diuisę fuerint, propter proportionem eandem; portiones huius, portionibus illius, per quadragesimam octauam, commensurabiles potentialiter erunt: & idcirco per sexagesimam septimam, eiusdem generis cum illis. Similiter, si portio maior illius rationalis, ac portio maior huius potentia tantùm rationalis ponatur, tunc reliquę portiones erunt residua. Si verò minor portio illius rationalis, ac minor huius potentia tantùm rationalis sit, tunc maiores binomia erunt: sicut infert corollarium.

PROPOSITIO 106ª.

Si circulus, cuius diameter rationalis circumscribat triangulum, quadratum, & hexagonum æquilaterum: solum latus hexagoni rationale est: latus verò tam trianguli, quàm quadrati

Potentialiter tantùm rationale & longitudine incommensurabile ipsius circuli diametro. Patet: nam latus hexagoni æquale est semidiametro circuli circumscribentis, vt in quarto Elementorum ostensum est. Latus autem trianguli potentialiter triplum; latus verò quadrati potentialiter duplum est ad semidiametrum: quæ rationes cùm nequaquàm sint, sicut numeri quadrati ad numerum quadratum, iam per secundum Corollarium quinquagesimætertiæ huius, latera talia incommensurabilia sunt semidiametro, & perinde diametro: sicut proponitur. Talis autem laterum ratio in decimotertio Elementorum commonstratur.

COROLLARIVM.

Et manifestum est simul, quòd latus triãguli ad latus quadrati in eodem circulo descriptorum potentialiter est sesquialterum; & perinde incommensurabile.

PROPOSITIO 107[a].

Si circulus, cuius diameter rationalis circumscribat decagonum, pentagonum, octogonum, atque dodecagonum æquilaterum: tunc latus decagoni erit Residuum quintum, latus pentagoni minor, latus octogoni minor, latus dodecagoni residuũ sextum. De lateribus decagoni, & pentagoni ostensum est in decimotertio Elementorum: de lateribus autem octogoni & dodecagoni ostensum est in speculationibus nostris: sed ex his demonstrationibus hæ regulæ deducuntur.

DE FIGVRIS ÆQVILATERIS REGVLAE.

QVando triangulum, quadratum, hexagonum, decagonum, pentagonum, octogonum, dodecagonum in circulo, cuius diameter rationalis, describuntur, hæ sunt regulæ inueniendi huiusmodi figurarum latera singula.

Quadratum lateris trianguli triplum est ad quadratum semidiametri.

Quadratum lateris quadrati, hoc est, ipsum quadratum descriptum, duplum est ad quadratum semidiametri.

Latus hexagoni æquale est ipsi semidiametro.

Latus

Latus decagoni est residuum quintum, cuius maior portio potentialiter sesquiquarta est ad semidiametrum. Minor verò portio est dimidium semidiametri.

Quadratum lateris pentagoni est residuum quartum, cuius maior portio est dupla sesquialtera ad quadratum semidiametri: minor verò portio potentialiter sequisquarta ad quadratum semidiametri. Vnde latus ipsum linea irrationalis erit, quę, MINOR.

Quadratum lateris octogoni est etiam Residuum quartum, cuius maior portio dupla est ad quadratum semidiametri: minor verò portio potentialiter dupla ad quadratum semidiametri. Vnde latus ipsum octogoni, sicut pentagoni, irrationalis erit, quæ, MINOR.

Latus dodecagoni est residuum sextum, cuius maior portio potentialiter sesquialtera est ad semidiametrum: minor verò potentialiter sub dupla eiusdem semidiametri.

PROPOSITIO. 180.

Si sphæra, cuius diameter rationalis, circumscribat quinque solida regularia: tam pyramidis, quàm octahedri & cubi latus potentia tantùm rationale est: ipsiq́, diametro longitudine incommensurabile: latus autem icosahedri, minor: latus verò dodecahedri, Residuum sextum. Patet: nam latus pyramidis ad semidiametrum potentia est, sicut 8. ad 3. latus octahedri duplum; latus cubi sesquitertium, latera duorum reliquorum irrationalia, sicut in tertiodecimo Elementorum ostensum est. Vnde regulæ sequentes.

DE SOLIDIS REGVLARIBVS REGVLAE.

QVando Pyramis, octahedrum, cubus, icosahedrum, dodecahedrum in sphæra, cuius diameter rationalis, describuntur; hæ sunt regulę inueniendi huiusmodi solidorum latera singula.

Quadratum lateris pyramidis duplum superpartiens duas tertias est ad quadratum semidiametri.

Quadratum

Quadratum lateris octahedri, duplum est ad quadratum semidiametri.

Quadratum lateris cubi, sesquitertium est ad quadratum semidiametri.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd latus Pyramidis ad latus octahedri potentia sesquitertium : ad latus cubi : duplum, & latus octahedri ad latus cubi sesquialterum.

Quadratum lateris icosahedri est residuum quartum, cuius maior portio dupla est ad quadratum semidiametri : minor verò portio potentialiter subsesquiquarta ad quadratum semidiametri. Vnde latus ipsum erit irrationalis, quæ MINOR.

Latus dodecahedri est Residuum sextum, cuius maior portio est potentialiter superpartiens duas tertias ad semidiametrum ; minor verò portio subtripla eiusdem semidiametri.

Ex quo calculo sequitur, Ingeniosissime Lector, vt sicut quadratum lateris hexagoni, siue semidiametri cum quadrato lateris decagoni coniunctum conflat quadratum lateris pentagoni; sic & in solidis in eadem sphæra descriptis, quadratum lateris pyramidis, cum quadrato cubici lateris simul acceptum, constituit quadratum spæricæ diametri. Item sicut in circulo, semidiametro, siue latere hexagoni secundum extremam, mediamque rationem diuisa, maior portio est decagoni latus : ita in sphæra, latere cubi similiter diuiso, maior portio erit dodecahedri latus. Quæ omnia quamquam demonstrata sunt in Elementis Geometricis, tamen ex ipso calculo apertissimè notescunt. Quorum exempla hìc subijcio.

LATERA FIGVRARVM AEQVILATERVM.

Semidiameter circuli—2. Rat[lis]. □.eius——4

Latus △[li] ————r.12.Ra.po. □.eius——12

Latus □[ti] ————r. 8.Ra.po. □.eius——8

Latus ✱[ni] ————2. Ra. □.eius——4

Latus decagoni—r.v. m̄.1. Res. 5[ū] □.ei⁹—6.m̄.r.20.Res p[ū]

Latus ⬠—r.v.—10.m̄.r.20.Minor □.ei⁹-10.m̄.r.20.Ref.4[ū]

Latus 8[ni].—r.v—8.m̄.r.32.Minor. □.ei⁹--8.m̄.r.32.Ref.4[ū]

Latus 12[ni]—— r.6.m̄.r.2. Res. 6[ū].

LATERA SOLIDORVM REGVLARIVM.

Semidiameter ſphęræ——2.Rat[lis] □.eius——4

Latus Pyramidis — r. $10\frac{2}{3}$ Ra.po. □.eius——$10\frac{2}{3}$

Latus Octahedri—— r. 8. Ra.po. □.eius——8

Latus Cubi————r. $5\frac{1}{3}$ Ra.po. □.eius——$5\frac{1}{3}$

L.Icoſahedri-r.v.8.m̄.r. $12\frac{4}{5}$ Minor □.ei⁹8.m̄.r. $12\frac{4}{5}$ Ref.4[ū]

L.Dodecahedri.r. $6\frac{2}{3}$ m̄.r. $1\frac{1}{3}$ Ref.6[ū]

Si linea duorũ pedũ ſecetur ſecundũ extremã mediamq; rationem, maior eius portio fiet r. 5.m̄.1. Reſiduum ſcilicet quintum. Minor vero.3.m̄.r.5. primum. Item ſi linea r. $5\frac{1}{3}$ ſimiliter diuidatur, maior eius portio erit r. $6.\frac{2}{3}$ m̄. r. $1\frac{1}{3}$ reſiduum ſextum. Minor verò.r.12.m̄.r.$6\frac{2}{3}$.

PROPOSITIO 109[a].

Si circuli pentagonũ æquilaterũ circũſcribentis diameter fuerit linea irrationalis Minor cõmenſurabilis minori propriè; tunc latus pentagoni erit Reſiduum quartum. Si autẽ latus Pentagoni ponatur Rationale; tunc diameter erit irrationalis, quæ Maior. Si demum latus pentagoni ponatur Maior prædictæ

commen-

commensurabilis : tunc diameter erit binomium. Sit a. linea circuli diameter rationalis, b. autem linea latus pentagoni in eo circulo descripti. Eritque per 107ª præcedentem, b. minor. Rursum, ponatur c. linea minor ipsi b. commensurabilis diametro alterius circuli, & latus pentagoni in circulo c. descripti sit linea d. aio, quòd linea d. est residuum quartum. Cùm enim diametri circulorum sint lateribus similium figurarum circumscriptarum proportionales, erit, sicut a. ad b. sic c. ad d. Quare, quod fit ex a. in d. æquum erit ei, quod ex b. in c. Sed id, quod ex b. in c. est Residuum quartum per septuagesimam primam huius, quoniam b c. sunt minores inuicem commensurabiles : igitur, quod fit ex a. in d. erit Residuum quartum. Cumq; idipsum diuisum in a. rationalem exhibeat in quotiente ipsam d. erit d. per sexagesimam quintam huius, Residuum quartum : & hæc est prima pars propositi. Deinde ponatur d. latus pentagoni rationale : tunc dico, quòd c. diameter circuli circumscribentis ipsum erit maior. Nam propter dictam proportionem diametrorum & laterum, erit, quod fit ex a d. æquum ei, quod ex b c. Rationale est autem, quod fit ex a d. quoniam a d. rationales ponuntur. Igitur rationale est, quòd fit ex b c. sed hoc diuisum per b. Minorem reddit ipsam c. ergo per centesimam secundam huius, c. Maior est ipsius b. Minoris correlatiua. & hoc est, quod secundo loco proponebatur. Demum ponatur d. latus pentagoni Maior, ipsius b. correlatiua, hoc est, commensurabilium & proportionalium nominum: tunc aio, quòd c. diameter circuli circumscribentis ipsum, erit binomium. Namque, vt prius, erit quod fit ex a d. æquum ei, quod ex b c. Sed quod ex a. rationali in d. Maiorem fit, per sexagesimam tertiam huius: Maior est ipsi d. Maiori commensurabilis. Igitur, quod sub b c. Maior est proportionalium & commensurabilium nominum ipsius b. nominibus commẽsurabilium. Verùm hoc diuisum per b. Minorem, per octuagesimam quintam, exhibet binomium, exhibet autem ipsam c. Ergo c. Binomium: quod supererat demonstrandum.

a

b

c

d

a

b

c

d

COROL-

COROLLARIVM.

Quod si pro latere pentagoni, sumatur latus octogoni: vel si pro diametro circuli, sumatur diameter sphæræ: & pro latere pentagoni latus icosahedri: eadem omnia, quæ proposita & demonstrata sunt, sequentur. Nam, per 107ª præcedentem, posita diametro rationali, tam latus octogoni in circulo talis diametri, quàm latus icosahedri in talis diametri sphæra descripti, Minor est, per præmissam, centesimam octauam.

PROPOSITIO 110ª.

Si circuli decagonum æquilaterum circumscribentis diameter fuerit Residuum commensurabile Residuo proprio: tunc latus decagoni erit Residuum primum. Si autem latus decagoni ponatur rationale: tunc diameter erit Binomium: commensurabilium nominum Residui proprij nominibus. Si demum latus decagoni ponatur binomium commensurabilium nominum Residui proprij nominibus: tunc diameter erit binomium primum. Sit a. linea Circuli diameter rationalis, b. autem linea latus decagoni in eo descripti: eritque, per præmissam 107ª b. residuum quintum. Rursum ponatur c. linea Residuum ipsi b. commensurabile, diameter alterius circuli. Et latus decagoni in circulo c. descripti sit linea d. Dico tunc quòd d. erit Residuum primum. Nam propter proportionem harum quatuor linearum, erit, quod fit ex a d. æquum ei, quòd ex b c. Sed quod ex b c. fit, per septuagesimam primam huius, est Residuum primum: quoniam b c. sunt residua inuicem commensurabilia. Igitur quod fit ex a d. Residuum primum est. Quod diuisum in a. rationalem, cum exhibeat in quotiente ipsam d. Erit d. per sexagesimam quintam huius, Residuum primum. Et hæc est prima pars propositi. Deinde ponatur d. latus decagoni rationale: tunc aio, quòd c. diameter circuli circumscribentis ipsum erit Binomium habens nomina commensurabilia ipsius b. Residui nominibus. Nam propter dictam proportionem diametrorum & laterum, erit quod fit ex a d. æquale ei quod fit ex b c. Rationale est autem, quod fit ex a d. quoniam a d. Rationales ponuntur. Igitur

a

b

c

d

tur

tur Rationale est, quod ex b c. Sed hoc cùm diuisum per b. Residuum exhibeat in quotiente ipsam c. erit per septuagesimam nonam huius, c. binomium commẽsurabilium nominum ipsius b. diuisoris nominibus: quod secundo loco proponebatur. Demum ponatur d. latus Decagoni binomium commensurabilium nominum ipsius b. residui nominibus: Dico tunc, quòd c. diameter circuli circumscribentis ipsum, erit Binomium primum. Nam, sicut antea, erit, quod fit ex a d. equum ei, quod ex b c. Sed quod ex a. Rationali in d. binomium fit, est, per sexagesimam tertiam huius, binomium ipsi d. binomio commensurabile: igitur quod sub b c. binomium est nominum commensurabilium ipsius b. Residui nominibus; Cumque hoc diuisum per b. residuum exhibeat in quotiente ipsam c. iampridem per octuagesimam tertiam huius, erit c. binomium primum: & hoc est tertium, quod restabat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quòd si pro latere decagoni, sumatur latus Dodecagoni: vel si pro diametro circuli, sumatur diameter sphęre, & pro latere Decagoni latus Dodecahedri: eadem omnia quę proposita hic & ostensa sunt, similiter sequentur. Nam, per 107ª, posita diametro rationali, latus dodecagoni Residuum sextum. At per 108, latus dodecahedri, adhuc idem residuum est.

Denique tam super lateribus isopleurarum figurarum, tam planarum, quàm solidarum, quàm super earum perpendicularibus, quàm etiam super lineę media extremaque ratione diuisę portionibus possent formari varię ac penè infinitę quęstiones; nunc videlicet circuli diametrum, nunc latera, nũc segmẽta supponẽdo irrationalia, nunc cuiusuis speciei aut ordinis irrationalia. sic igitur in immensa, atque inextricabilem irrationalium syluam, videlicet trinomia, quadrinomia, mediales secundas, tertias, & cęteras, quę infinitæ sunt. Quę tamen ex ipso calculo curiosis notescere possunt. Nobis satis sit hactenus processisse, praximque decimi

decimi Elementorum demonstrasse, ac multa ab Euclide omissa conclusisse. Cętera relinquo curiosioribus. Sed obscura, minusque necessaria minus curanda sunt. Quod & Cicero in Officiis pręcipere videtur.

Libri secundi Arithmeticorum Maurolyci finis: hora decimaoctaua, diei Sabbati, qui fuit Iulij 24°. Cùm Messana cum multo pontis & arcus apparatu expectaretur Io. Cerda, Methynensium Dux, Prorex. Indict. 15.

M. D. LVII.

VENETIIS, M D LXXV.
Apud Franciscum Franciscium Senensem.


PAX

INDEX LVCVBRATIONVM.



Vclidis elementa, discussis Interpretum erroribus, tam Cāpani nimium sibi confidentis, quàm Zamberti professionem Ignorantis. Cum additionibus quarumdam propositionum, præsertim ad regularia solida spectantium.

Theodosij Sphærica elementa libris tribus, astronomiæ principijs necessaria.

Menelai Sphærica libris. 3. multis demonstrationibus adaucta, ad scientiam sphæralium triangulorum pertinentia.

Apollonij Conica elementa libris 4. & demonstrationibus, & lineamentis opportunis instaurata.

Sereni Cylindrica, libris. 2.

Archimedis opera, De dimensione Circuli, De Sphera & Cylindro. De Isoperimetris, De momentis æqualibus, De Quadratura Parabolæ. De spheroidibus & Conoidibus figuris. De spiralibus. Cum additione demonstrationum, facilius demonstrata.

Iordani Arithemetica, & Data.

Theonis Data geometrica.

Rogerii Bacconis, & Io. Petsan Perspectiuæ breuiatæ cum adnotationibus errorum.

Ptolemei Specula. Et de speculo vstorio libellus.

Autolyci de sphera, quæ mouetur.

Theodosij de habitationibus.

Euclidis Phænomena breuissimè demonstrata.

Aristotelis problemata mechanica, cum additionibus complurimis, & iis, quæ ad pyxidem nauticam, & quæ ad Iridem spectant.

PROPRIA IPSIVS AVTHORIS.

Prologi, siue sermones quidam De diuisione artium, De quantitate, De proportione, De mathematicæ authoribus, De sphæra, De Cosmographia De Conicis, De solidis regularibus, De operibus Archimedis, De quadratura Circuli, De Instrumentis, De Calculo, De perspectiua, De musica, De diuinatione.

Arithmetica speculatiua libris duobus: in quorum primo multa de formis tam planis, quàm solidis numerorum à nemine hactenus animaduersa. In secundo autem theoria & praxis rationalium & Irrationalium magnitudinum per numerarios terminos cum multis nouis, quæ ad decimũ

Euclidis faciunt, demonstrationibus abunde tractatur.
Arithmetica data libellis quattuor demonstrata.
Positionū & rei demōstrationes ad quattuor præcepta vel capita redactæ.
Sphæricorum libelli duo. In quibus multa à Menelao neglecta, vel omissa supplentur pro Sphæralium scientia triangulorum.
Sphera mobilis in octo Capita pro circulis primi motus.
Cosmographia de forma, situ, numeroq; cælorum & elementorum olim Petro Bembo dicata.
Conicorum elemētorum quintus & Sextus post quattuor Apollonii libros locandi.
De Compaginatione solidorum regularium.
Quæ figuræ tam planæ, quàm solidæ locum impleant, vbi Auerroes Geometriam ignorasse indicatur.
De momentis æqualibus libri quattuor: in quorum postremo de centris solidorum ab Archimede omissis agitur: & de centro solidi parabolici.
De quadrati geometrici, Quadrantis, & Astrolabi speculatione, fabrica, vsuq; ue.
De lineis horariis libri 3. In quibus tota huiusmodi linearum theoria, quo ad situm, colligantiam & descriptionem ipsarum plene tractatur. Nam lineæ horariæ à meridie cœptæ, secant periferiam quandam in iis punctis in quibus eandem tangunt lineæ horariæ ab occasu vł ortu exensæ. Talis autem periferia vł circulus est, uel ex Conicis sectionibus aliqua, scilicet Parabolè, Ellipsis, uel hyperbole.
Photismi de lumine, & umbra, ad perspectiuam & radiorum incidentiam facientes.
Diaphana in 3. libros diuisa. In quorum primo de perspicuis corporibus. In 2. de iride. in 3. autem de organi uisualis structura, & conspiciliorum formis agitur.
Quæstionum arithmeticarum libelli. 3. Geometricarum libelli 2. Astronomicorum problematum tres: in quibus regulæ cum exemplis traduntur.
Adnotationes omnimodæ in diuersos Mathematicæ locos.
Canones tabularū Alfonsi, Blanchini Eclipsium, Directionū primi mobilis.
Compendium Mathematicæ breuissimum.
Elementorum Euclidis Epitome cum nouis & artificiosissimis in quintium, in arithmetica, in decimum, & in solidorum libros demonstrationibus.
Conicorum Apollonii breuiarium libris 3. facilius & directe demonstratū.
Tabula sinus recti supponens sinum maximum siue circuli semidiametrum plurium, quàm millies mille particularum. quod est totius geometrici, astronomiciq; calculi necessarium instrumentum.
Compendium magnæ constructionis Ptolomaicæ omnium obseruationū astronomi-

nomicarum seriem paucis comprehendens ex breuiario Io. Regimontii.
Compendium Boetianæ Musicæ, cum optimis speculationibus & calculo ac modulatuum ratione, & systematum proportione.
Sphera in compendium breuiter omnia comprehendens, cum motuum secundorum Theoria.
Computus Ecclesiasticus breuis & exactus.
Adnotationes in sphæram Io. Sacrobusti, & in Theoricas planetarum.
Quadrati, Quadrantis, Astrolabi, instrumenti armillaris & Sphæræ solidæ demonstratio, fabrica, & usus, per nouam, artificiosam, breuemq ue speculationem.
De lineis horariis regulæ breuissimæ, & Theoria pro quocunque horizonte.
Compendium Sicanicæ historiæ.
Martyrologium Sanctorum correctum & instauratum. Cum Topographia & aliis appendicibus.
Hymnorum ecclesiasticorum liber unus.
Carminum & Epigrammatum libelli duo.
Poemata Phocylidis & Pythagoræ moralia Latino mœtro.
Genealogia Deorũ, Io. Boccacii adaucta, cũ multis Illustriũ uirorũ & principum carptim collectis prosapiis ad poesim & historiam necessariis.
Rhythmi vulgari seu uernaculo sermone, in laudem S. Crucis.
Chronologia ab Adamo protoplasto, Christi, principum, præsulum, & notabilium rerum, breuissima.
Itinerarium Syriacum cum historiis ad loca sacra pertinentibus.
Ad Petrum Bembum de Aetneo incendio.
Ad Synodi Tridentini patres epistola.

Breuiaria.

Platinæ de uitis Pontificum.
Sex librorum de uitis patrum.
Decem librorum Laertii de uitis Philosophorum.
Petri Criniti de uitis Poetarum.
Octo librorum Polydori de inuentoribus rerum.
Consiliorum Synodalium.
Sex librorum Diodori Siculi.
Grammaticarum institutionum libri sex.
Quadrati horarii fabrica, & vsus.

Demonstratio & praxs.

Trium tabellarum sinus recti, beneficæ & fæcundæ, ad scientiam & calculum triangulorum sphæralium utiles.
Compendium iudiciariæ ex optimis quibusque authoribus decerptum in quo de naturis signorum & domorum 12. septemq ue planetarum cõ-

stellationum, aspectuum, directionum, profectionum, horoscoporum, electionum, & quæstionum Regulæ, præsertim ad agricolas, medicos, nautas & milites, & exclusis superstitionibus, directæ.

Notandum quòd ex supra scriptis operibus

Theodosij, Menelai Maurolyci Spherica: Item Autolici Sphæra, Theodosii de habitationibus, Euclidis Phænomena. Demonstratio & praxis trium tabellarum sinus recti, fœcundæ, ac Beneficæ, Compendium Mathemathicæ breuissimum simul in unum uolumen: Messanæ impressa fuerunt à Petro Spina filio, Georgii Spinæ Germani. anno saluti 1558.

Item

Cosmographia olim Petro Bembo dicata 3. lib. Impressa fuit Venetiis apud Iunctas. anno salutis 1543. Et rursum Basileæ apud Io. Oponimum.

Item

Quadrati horarii fabrica & usus d. Io. XX. [llio.] dicata, venetiis apud Nicolaum Bassaninum anno sal. 1546.

Item

Grammatica quædam rudimenta, Messanæ per eundem Georgii Spinæ filium anno salutis 1528.

Rhythmi quoque materni de laude S.C. ibidē per eosdē anno salutis. 1552.

Item

Martyrologium conrectum & instauratum Reuerend. domino M. Ant. Amulio Card. dicatum cum opographia cum multis appendicibus. anno salutis 1567. mense Septembris Venetiis apud Iunctas impressum, & iterum in forma parua mense Iulio. 1568.

Item

Historiæ Sicanicæ compendium cū epistola simul ad patres Tridentinæ Synodi, Messanæ impressum per eundem Georgii Spinæ filium & nepotes. anno sal. 1562.

Item

De uita Xpi, eiusq; matris, & gestis Apostolorum libelli octo senariis rythmis uulgaribus. Venetiis per Augustinum Bindonum. 1556

INDEX COPIOSVS IN DVOS LIBROS ARITHMETICORVM,

Alphabetico ordine dispositus.

De litera A.

De litera B.

ratio-

De litera C.

De litera D.

De litera E.

De litera F.

De litera G.

De litera H.

De litera L.

De litera M.

De litera N.

De litera O.

De litera P.

De litera Q.

De litera R.

De litera S.

De litera T.

eodem

Errata sic corrigito.

Fol. 106. uersu ultimo, æquum æquus. 117. 28. extrema extremam. 129. 1. Residum Residuum. 154. 30. proueniat. 163. 3. minor maior.

